GTI – ÜBUNG 8

NELSON/PETRICK, QUINE/MCCLUSKEY, ÜBERDECKUNGSTABELLE

Friedrich-Alexander Universität Erlangen-Nürnberg
Jan Spieck

Aufgabe 1 – Nelson/Petrick

Friedrich-Alexander Universität Erlangen-Nürnberg
Jan Spieck

Beschreibung

- Gegeben sei die folgende Funktionstabelle

Achtung: die Codeworte sind einschrittig codiert, d.h. nicht aufsteigend

Aufgabe 1 – Nelson/Petrick

Dezimal	Oktal	x_4 x_3 x_2 x_1	$y_0(x)$	$y_1(X)$
0	00	0 0 0 0	0	0
1	01	0 0 0 1	0	0
3	03	0 0 1 1	1	1
2	02	0 0 1 0	1	1
6	06	0 1 1 0	1	0
7	07	0 1 1 1	1	1
5	05	0 1 0 1	1	1
4	04	0 1 0 0	0	0
12	14	1 1 0 0	1	1
13	15	1 1 0 1	1	0
15	17	1 1 1 1	1	1
14	16	1 1 1 0	1	1
10	12	1 0 1 0	1	1
11	13	1 0 1 1	1	1
9	11	1 0 0 1	1	1
8	10	1 0 0 0	1	1

Friedrich-Alexander Universität Erlangen-Nürnberg
Jan Spieck

Aufgabe 1 – Nelson/Petrick

Friedrich-Alexander Universität Erlangen-Nürnberg
Jan Spieck

Beschreibung

- Ermitteln Sie ein Konjunktive Minimalform (KMF) für die Funktion y_0 mit Hilfe eines Symmetriediagramms.

Hinweis: das Zeichnen eines SD sollte aus der letzten Übung bekannt sein

hier benötigen wir eine Nullstellenüberdeckung

Aufgabe 1 – Nelson/Petrick

Dezimal	**Oktal**	x_4 x_3 x_2 x_1	$y_0(x)$
0	00	0 0 0 0	0
1	01	0 0 0 1	0
3	03	0 0 1 1	1
2	02	0 0 1 0	1
6	06	0 1 1 0	1
7	07	0 1 1 1	1
5	05	0 1 0 1	1
4	04	0 1 0 0	0
12	14	1 1 0 0	1
13	15	1 1 0 1	1
15	17	1 1 1 1	1
14	16	1 1 1 0	1
10	12	1 0 1 0	1
11	13	1 0 1 1	1
9	11	1 0 0 1	1
8	10	1 0 0 0	1

- Wir ermitteln zuerst ein SD für die Funktion y_0.

x_1

0_{0}	0_{1}	1_{5}	0_{4}
1_{2}	1_{3}	1_{7}	1_{6}
1_{12}	1_{13}	1_{17}	1_{16}
1_{10}	1_{11}	1_{15}	1_{14}

x_2

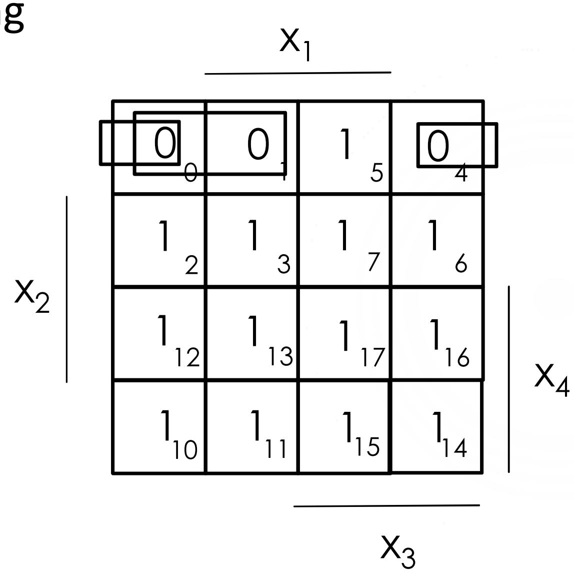
x_4

x_3

Friedrich-Alexander Universität Erlangen-Nürnberg
Jan Spieck

Aufgabe 1 – Nelson/Petrick

- Dann suchen wir alle Blöcke einer Nullstellenüberdeckung



Primimplikate:

$(x_4 + x_3 + x_2)$, $(x_4 + x_2 + x_1)$

Achtung: Variablen negieren und verodern!
Dies ist genau das Gegenteil zu der DMF-Bestimmung.

Tipp: wie DMF auslesen und dann negieren (De Morgan)

z.B. $\overline{x_2}\,\overline{x_3}\,\overline{x_4} \rightarrow \overline{\overline{x_2}\,\overline{x_3}\,\overline{x_4}} = x_2 + x_3 + x_4$

Alle Primimplikate sind Kerne, also lautet die KMF:

$y_0 = (x_4 + x_3 + x_2)\,(x_4 + x_2 + x_1)$

Friedrich-Alexander Universität Erlangen-Nürnberg
Jan Spieck

Aufgabe 1 – Nelson/Petrick

- Ermitteln Sie alle Primimplikanten für die Funktion y_0 mit Hilfe des Nelson – Verfahrens. Verwenden Sie dabei die berechneten Primimplikate.

Hinweis: Ausdistribuieren der Primimplikate

Friedrich-Alexander Universität Erlangen-Nürnberg
Jan Spieck

Aufgabe 1 – Nelson/Petrick

- Das Nelson – Verfahren

Ziel: algebraische Bestimmung aller Primimplikaten zur Bildung einer DMF

Vorgehen:

- Behandlung aller Freistellen (Don‘t cares) als Einsstellen
- Bestimmung einer konjunktiven Form mittels Nullblocküberdeckung
- Umformen auf eine disjunktive Form mittels Distribution und Absorption
- Streichen aller Terme, die nur Freistelle (Don‘t cares) überdecken

Aufgabe 1 – Nelson/Petrick

▶ Wir wenden das Nelson-Verfahren an.

Vorgehen:

- Behandlung aller Freistellen (Don‘t cares) als Einsstellen ✓
- Bestimmung einer konjunktiven Form mittels Nullblocküberdeckung ✓
- Umformen auf eine disjunktive Form mittels Distribution und Absorption

$$y_0 = (x_4 + x_3 + x_2)(x_4 + x_2 + x_1) \quad |\text{Distributivgesetz}$$

$$= x_4 + x_2 + x_4x_3 + x_4x_2 + x_4x_1 + x_3x_2 + x_3x_1 + x_2x_1 \quad |\text{Absorption}$$

$$= x_4 + x_2 + x_3x_1$$

- Streichen aller Terme, die nur Freistelle (Don‘t cares) überdecken

Keine Don‘t Cares vorhanden -> Lösung entspricht der Lösung des dritten Schritts

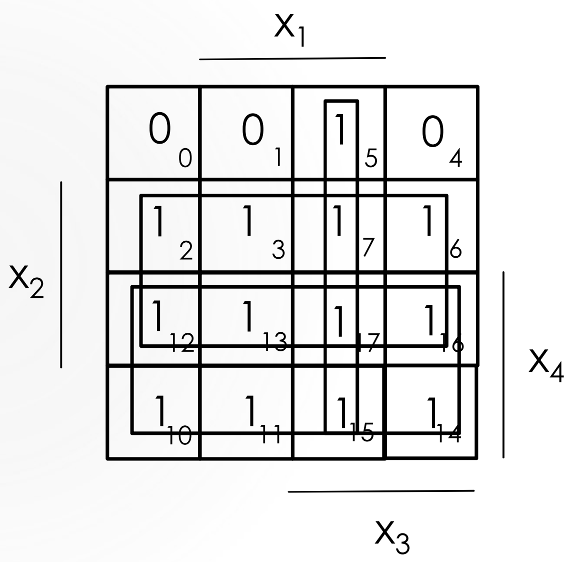
Friedrich-Alexander Universität Erlangen-Nürnberg
Jan Spieck

Aufgabe 1 – Nelson/Petrick

- Lösung

$$y_0 = x_4 + x_2 + x_3x_1$$

Überprüfen im Symmetriediagramm:



Friedrich-Alexander Universität Erlangen-Nürnberg
Jan Spieck

Aufgabe 1 – Nelson/Petrick

- Bestimmen Sie eine Disjunktive Minimalform (DMF) für die Funktion y_1 mit Hilfe des Nelson/Petrick – Verfahrens

Hinweis: Zuerst Nelson anwenden, dann Petrick (letzte Übung)

Friedrich-Alexander Universität Erlangen-Nürnberg
Jan Spieck

Aufgabe 1 – Nelson/Petrick

- Wir wenden das Nelson-Verfahren an.

Vorgehen:

- Behandlung aller Freistellen (Don‘t cares) als Einsstellen ✓
- Bestimmung einer konjunktiven Form mittels Nullblocküberdeckung
- Umformen auf eine disjunktive Form mittels Distribution und Absorption
- Streichen aller Terme, die nur Freistelle (Don‘t cares) überdecken

Friedrich-Alexander Universität Erlangen-Nürnberg
Jan Spieck

Aufgabe 1 – Nelson/Petrick

Dezimal	Oktal	$x_4\, x_3\, x_2\, x_1$	$y_1(X)$
0	00	0 0 0 0	0
1	01	0 0 0 1	0
3	03	0 0 1 1	1
2	02	0 0 1 0	1
6	06	0 1 1 0	0
7	07	0 1 1 1	1
5	05	0 1 0 1	1
4	04	0 1 0 0	0
12	14	1 1 0 0	1
13	15	1 1 0 1	0
15	17	1 1 1 1	1
14	16	1 1 1 0	1
10	12	1 0 1 0	1
11	13	1 0 1 1	1
9	11	1 0 0 1	1
8	10	1 0 0 0	1

- Wir starten mit einer KNF, d.h. Verundung aller Nullterme

$$
\begin{aligned}
y_1 = \ & (x_4 + x_3 + x_2 + x_1) \cdot \\
& (x_4 + x_3 + x_2 + \overline{x_1}) \cdot \\
& (x_4 + \overline{x_3} + x_2 + x_1) \cdot \\
& (x_4 + \overline{x_3} + \overline{x_2} + x_1) \cdot \\
& (\overline{x_4} + \overline{x_3} + x_2 + \overline{x_1})
\end{aligned}
$$

Achtung: umgekehrte Negation und Oder

Friedrich-Alexander Universität Erlangen-Nürnberg
Jan Spieck

Aufgabe 1 – Nelson/Petrick

- Wir wenden das Nelson-Verfahren an.

Vorgehen:

- Behandlung aller Freistellen (Don‘t cares) als Einsstellen ✓
- Bestimmung einer konjunktiven Form mittels Nullblocküberdeckung ✓
- Umformen auf eine disjunktive Form mittels Distribution und Absorption
- Streichen aller Terme, die nur Freistelle (Don‘t cares) überdecken

Friedrich-Alexander Universität Erlangen-Nürnberg
Jan Spieck

Aufgabe 1 – Nelson/Petrick

- Wir starten mit einer KNF, d.h. Verundung aller Nullterme

$y_1 \quad = \quad (x_4 + x_3 + x_2 + x_1) \cdot (x_4 + x_3 + x_2 + \overline{x_1}) \cdot (x_4 + \overline{x_3} + x_2 + x_1) \cdot$

$\qquad (x_4 + \overline{x_3} + \overline{x_2} + x_1) \cdot (\overline{x_4} + \overline{x_3} + x_2 + \overline{x_1})$ | Distributivgesetz

$= \quad (x_4 + x_3 + x_2) \cdot (x_4 + \overline{x_3} + x_1) \cdot (\overline{x_4} + \overline{x_3} + x_2 + \overline{x_1})$ | Distributivgesetz + Abs.

$= \quad (x_4 + x_3 + x_2) \cdot (\overline{x_3} + x_4 x_2 + x_4 \overline{x_1} + \overline{x_4} x_1 + x_2 x_1)$ | Distributivgesetz + Abs.

$= \quad x_4 \overline{x_3} + x_4 x_2 + x_4 \overline{x_1} + \overline{x_4} x_3 x_1 + \overline{x_3} x_2 + x_2 x_1$

Friedrich-Alexander Universität Erlangen-Nürnberg
Jan Spieck

Aufgabe 1 – Nelson/Petrick

- ▶ Wir wenden das Nelson-Verfahren an.

Vorgehen:

- o Behandlung aller Freistellen (Don‘t cares) als Einsstellen ✓
- o Bestimmung einer konjunktiven Form mittels Nullblocküberdeckung ✓
- o Umformen auf eine disjunktive Form mittels Distribution und Absorption ✓
- o Streichen aller Terme, die nur Freistelle (Don‘t cares) überdecken ✓

Da keine Don‘t Cares enthalten!

Also auf zum Petrick – Verfahren.

Friedrich-Alexander Universität Erlangen-Nürnberg
Jan Spieck

Aufgabe 1 – Nelson/Petrick

- Begriffsklärung

Terme der Einsenüberdeckung

überdeckte Einsen z.B. als Dezimal- /Oktalzahlen (vgl. SD)

Kosten der Terme

Implikant	**2**	**8**	**10**	**11**	**26**	**29**	**31**	**c_k**
$\bar{e}\bar{c}b$	X		X	X				5
$\bar{e}ba$				X				5
$d\bar{c}b$			X	X	X			5
dba							X	5
dca						X	X	5
$\bar{c}a$	X	X	X		X			2
$\bar{e}d$		X	X	X				2

Friedrich-Alexander Universität Erlangen-Nürnberg
Jan Spieck

Aufgabe 1 – Nelson/Petrick

- Bilden einer Überdeckungstabelle

$$y_1 \quad = \quad x_4\overline{x_3} + x_4x_2 + x_4\overline{x_1} + \overline{x_4}x_3x_1 + \overline{x_3}x_2 + x_2x_1$$

Implikant	**2**	**3**	**5**	**7**	**8**	**9**	**10**	**11**	**12**	**14**	**15**	**p_i**	**c_k**
$x_4\overline{x_3}$					X	X	X	X				A	2
x_4x_2							X	X		X	X	B	2
$x_4\overline{x_1}$					X		X		X	X		C	2
$\overline{x_4}x_3x_1$			X	X								D	3
$\overline{x_3}x_2$	X	X					X	X				E	2
x_2x_1		X		X				X			X	F	2

Friedrich-Alexander Universität Erlangen-Nürnberg
Jan Spieck

Aufgabe 1 – Nelson/Petrick

- Bilden des Petrick – Ausdruckes

Implikant	2	3	5	7	8	9	10	11	12	14	15	p_i	c_k
$x_4\overline{x_3}$					X	X	X	X				A	2
x_4x_2							X	X		X	X	B	2
$x_4\overline{x_1}$					X		X		X	X		C	2
$\overline{x_4}x_3x_1$			X	X								D	3
$\overline{x_3}x_2$	X	X					X	X				E	2
x_2x_1		X		X				X			X	F	2

Dazu: Disjunktion der spaltenweise konjugierten Implikanten

PA = E (E + F) D (D + F) (A + C) A (A + B + C + E) (A + B + E + F) C (B + C) (B + F) = 1

Friedrich-Alexander Universität Erlangen-Nürnberg
Jan Spieck

Aufgabe 1 – Nelson/Petrick

- Vereinfachen des Petrick – Ausdruckes

Zuerst Anwendung der Absorption, dann Anwendung des Distributivgesetzes:

PA = E (E + F) D (D + F) (A + C) A (A + B + C + E) (A + B + E + F) C (B + C) (B + F)

= E D A C (B + F)

= ABCDE + ACDEF

Beide Ausdrücke kosten gleich viel (Primäre Kosten: 11, Sekundäre Kosten: 5)

ABCDE: $x_4\overline{x_3} + x_4x_2 + x_4\overline{x_1} + \overline{x_4}x_3x_1 + \overline{x_3}x_2$

ACDEF: $x_4\overline{x_3} + x_4\overline{x_1} + x_2x_1 + \overline{x_4}x_3x_1 + \overline{x_3}x_2$

Friedrich-Alexander Universität Erlangen-Nürnberg
Jan Spieck

Aufgabe 2 – Überdeckungstabelle

- Lösen Sie das folgende Überdeckungsproblem tabellarisch mittels einer Überdeckungstabelle und unter Angabe der verwendeten Regeln. Geben Sie zudem eine DMF der Schaltfunktion g(e, d, c, b, a) an.

Implikant	**2**	**8**	**10**	**11**	**26**	**29**	**31**	**c_k**
$\bar{e}\bar{c}b$	X		X	X				5
$\bar{e}ba$				X				5
$d\bar{c}b$			X	X	X			5
dba							X	5
dca						X	X	5
$\bar{c}a$	X	X	X		X			2
$\bar{e}d$		X	X	X				2

Friedrich-Alexander Universität Erlangen-Nürnberg
Jan Spieck

Aufgabe 2 – Überdeckungstabelle

- Begriffsklärung

Überdeckungstabelle:

- Anwendung nach dem Bestimmen aller Primterme (z.B. durch SD oder Nelson)
- Graphische Alternative zum algebraischen Petrickverfahren
- Minimierung des logischen Ausdrucks durch optimale Selektion der Primterme, die zu einer vollständigen Überdeckung aller Einsstellen führt.

Algorithmus:

Wiederhole solange, bis keine Schritte mehr anwendbar sind:

1:	Regel der Kernimplikanten	(Spalte + Schnittspalten streichen)
2:	Regel der Spaltendominanz	(dominierende Spalte streichen)
3:	Regel der Zeilendominanz	(dominierte Zeile streichen)

Friedrich-Alexander Universität Erlangen-Nürnberg
Jan Spieck

Aufgabe 2 – Überdeckungstabelle

- Begriffsklärung

Kernimplikant (Kernterm):

- Primterm, der eine 1 überdeckt, die kein anderer Primterm überdeckt
- In der ÜT erkennbar durch nur einen Eintrag in einer Spalte
- Müssen in die Überdeckungslösung aufgenommen werden

k	**0**	**2**	**3**	**5**
1			X	X
2	X		X	X
~~3~~		X		
4	X			X

Friedrich-Alexander Universität Erlangen-Nürnberg
Jan Spieck

Aufgabe 2 – Überdeckungstabelle

Friedrich-Alexander Universität Erlangen-Nürnberg
Jan Spieck

- Begriffsklärung

Spaltendominanz:

- Spalten, die andere Spalten dominieren, können gestrichen werden
- Sei Spalte L_1 Teilmenge einer Spalte L_2 ($L_1 \subset L_2$), so kann L_2 gestrichen werden
  (Grund: wird L_1 beliebig überdeckt, so auch automatisch L_2)

Beispiel: 3 wird von 5 dominiert, 0 wird von 5 dominiert

k	**0**	**2**	**3**	**5**
1			X	X
2	X		X	X
3		X		
4	X			X

Aufgabe 2 – Überdeckungstabelle

Zeilendominanz:

- Dominierte Zeilen können, falls keine zusätzlichen Kosten entstehen oder keine Zeilen existieren, welche die restlichen Einsstellen überdecken können, und weniger als die Kostendifferenz kosten, gestrichen werden
- Sei Zeile L_1 (mit Kosten c_1) echte Teilmenge einer Zeile L_2 (mit Kosten c_2) ($L_1 \subset L_2$), so kann L_1 gestrichen werden, falls $c_2 \leq c_1$ gilt oder keine Zeile existiert, welche die restlichen Einsstellen von L_1 überdecken kann und weniger als $c_2 - c_1$ kosten
- Beispiel A: 2 dominiert 1 bei gleichen Kosten

k	**0**	**2**	**3**	**5**	**c_k**
~~1~~			~~X~~	~~X~~	~~2~~
2	X		X	X	2
3		X			3
4	X			X	1

Friedrich-Alexander Universität Erlangen-Nürnberg
Jan Spieck

Aufgabe 2 – Überdeckungstabelle

Zeilendominanz:

- Beispiel B: 2 dominiert 1 bei größeren Kosten von 2, aber es existiert keine Kombination aus 1 und zusätzlichen Zeilen, die weniger als $c_2 - c_1 = 1$ kostet und alle Spalten (Einstellen) von 2 überdeckt. Die Kombination 1 + 4 ist zu teuer, da $c_4 = 2 > c_2 - c_1 = 1$

k	**0**	**2**	**3**	**5**	**c_k**
~~1~~			~~X~~	~~X~~	~~2~~
2	X		X	X	3
3		X			3
4	X			X	2

Friedrich-Alexander Universität Erlangen-Nürnberg
Jan Spieck

Aufgabe 2 – Überdeckungstabelle

Zeilendominanz:

- Beispiel C: 2 dominiert 1 bei größeren Kosten von 2, aber es existiert eine Kombination aus 1 und zusätzlichen Zeilen, die gleich viel wie $c_2 - c_1 = 1$ kostet und alle Spalten (Einstellen) von 2 überdeckt. Dies ist die Kombination 1 + 4, da $c_4 = 1 = c_2 - c_1$. Es wird keine Zeile gestrichen!

k	**0**	**2**	**3**	**5**	**c_k**
1			X	X	2
2	X		X	X	3
3		X			3
4	X			X	1

Friedrich-Alexander Universität Erlangen-Nürnberg
Jan Spieck

Aufgabe 2 – Überdeckungstabelle

Friedrich-Alexander Universität Erlangen-Nürnberg
Jan Spieck

Zeilendominanz:

- Beispiel D: 2 dominiert 1 bei größeren Kosten von 2 und es existiert eine Kombination aus 1 und zusätzlichen Zeilen, die weniger als $c_2 - c_1 = 1$ kostet und alle Spalten (Einstellen) von 2 überdeckt: die Kombination 1 + 4, da $c_4 = 1 < 2 = c_2 - c_1$. Es wird Zeile 2 gestrichen! (Zeilenabsorptionsregel)

k	**0**	**2**	**3**	**5**	**c_k**
1			X	X	2
~~2~~	~~X~~		~~X~~	~~X~~	~~4~~
3		X			3
4	X			X	1

Aufgabe 2 – Überdeckungstabelle

- Lösen Sie das folgende Überdeckungsproblem tabellarisch

Schritt 1 (Kernimplikant): Kernimplikant dca, deshalb 29 streichen + Schnittspalte 31

Implikant	2	8	10	11	26	29	31	c_k
$\bar{e}\bar{c}b$	X		X	X				5
$\bar{e}ba$				X				5
$d\bar{c}b$			X	X	X			5
dba							X	5
dca						X	X	5
$\bar{c}a$	X	X	X		X			2
$\bar{e}d$		X	X	X				2

Friedrich-Alexander Universität Erlangen-Nürnberg
Jan Spieck

Aufgabe 2 – Überdeckungstabelle

- Lösen Sie das folgende Überdeckungsproblem tabellarisch

Schritt 2 (Spaltendominanz): 10 dominiert Spalte 2, 8 und 26 -> streichen

Implikant	**2**	**8**	**10**	**11**	**26**	**29**	**31**	**c_k**
$\bar{e}\bar{c}b$	X		X	X				5
$\bar{e}ba$				X				5
$d\bar{c}b$			X	X	X			5
dba							X	5
~~dca~~						X	X	5
$\bar{c}a$	X	X	X		X			2
$\bar{e}d$		X	X	X				2

Friedrich-Alexander Universität Erlangen-Nürnberg
Jan Spieck

Aufgabe 2 – Überdeckungstabelle

- Lösen Sie das folgende Überdeckungsproblem tabellarisch

Schritt 3 (Zeilendominanz): $\bar{e}ba$ dominiert von Zeilen $\bar{e}\bar{c}b$ und $d\bar{c}b$ -> streichen

Implikant	**2**	**8**	**10**	**11**	**26**	**29**	**31**	**c_k**
$\bar{e}\bar{c}b$	X		X	X				5
~~$\bar{e}ba$~~				~~X~~				~~5~~
$d\bar{c}b$			X	X	X			5
dba							X	5
~~dca~~						X	~~X~~	~~5~~
$\bar{c}a$	X	X	X		X			2
$\bar{e}d$		X	X	X				2

Friedrich-Alexander Universität Erlangen-Nürnberg
Jan Spieck

Aufgabe 2 – Überdeckungstabelle

- Lösen Sie das folgende Überdeckungsproblem tabellarisch

Resttabelle leicht lösbar, da Einsatz geringer Kosten c_k bevorzugt (scharfes Hinsehen)

Implikant	**2**	**8**	**10**	**11**	**26**	**29**	**31**	**c_k**
$\bar{e}\bar{c}b$	X		X	X				5
$\cancel{\bar{e}ba}$				X				5
$d\bar{c}b$			X	X	X			5
dba							X	5
$\cancel{dca}$						X	X	5
$\bar{c}a$	X	X	X		X			$\rightarrow 2$
$\bar{e}d$		X	X	X				$\rightarrow 2$

Friedrich-Alexander Universität Erlangen-Nürnberg
Jan Spieck

Aufgabe 2 – Überdeckungstabelle

- Geben Sie zudem eine DMF der Schaltfunktion g(e, d, c, b, a) an.

DMF: $g(e,d,c,b,a) = acd + a\bar{c} + d\bar{e}$

Implikant	2	8	10	11	26	29	31	c_k
$\bar{e}\bar{c}b$	X		X	X				5
$\bar{e}ba$				X				5
$d\bar{c}b$			X	X	X			5
dba							X	5
→ dca						X	X	5
→ $\bar{c}a$	X	X	X		X			2
→ $\bar{e}d$		X	X	X				2

Friedrich-Alexander Universität Erlangen-Nürnberg
Jan Spieck

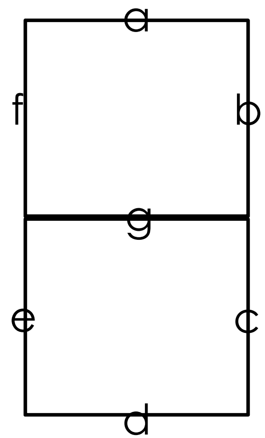
Aufgabe 3 – Quine/ McCluskey

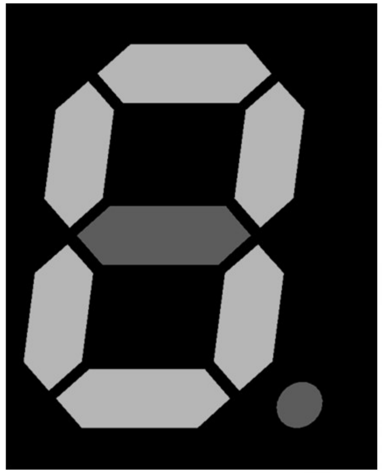
- Beschreibung

Optimieren Sie mit Hilfe des Verfahrens von Quine und McCluskey die Schaltfunktion, die den Hexcode (D C B A) für den Leuchtbalken a einer Siebensegmentanzeige umcodiert.

Aufgabe 3 – Quine/ McCluskey

Hex	D C B A	a b c d e f g
0	0 0 0 0	1 1 1 1 1 1 0
1	0 0 0 1	0 1 1 0 0 0 0
2	0 0 1 0	1 1 0 1 1 0 1
3	0 0 1 1	1 1 1 1 0 0 1
4	0 1 0 0	0 1 1 0 0 1 1
5	0 1 0 1	1 0 1 1 0 1 1
6	0 1 1 0	1 0 1 1 1 1 1
7	0 1 1 1	1 1 1 0 0 0 0
8	1 0 0 0	1 1 1 1 1 1 1
9	1 0 0 1	1 1 1 1 0 1 1
A	1 0 1 0	1 1 1 0 1 1 1
B	1 0 1 1	0 0 1 1 1 1 1
C	1 1 0 0	0 0 0 1 1 0 1
D	1 1 0 1	0 1 1 1 1 0 1
E	1 1 1 0	1 0 0 1 1 1 1
F	1 1 1 1	1 0 0 0 1 1 1





http://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/2/2b/Seven_segment_display-animated.gif

Friedrich-Alexander Universität Erlangen-Nürnberg
Jan Spieck

Aufgabe 3 – Quine/ McCluskey

- Verfahren im Vergleich

Bestimmen aller Primimplikanten:

- Symmetriediagramme
- Nelson – Verfahren
- Quine/McCluskey – Verfahren

Kostenminimale Auswahl der Primimplikanten:

- Symmetriediagramme
- Überdeckungstabelle
- Petrick – Verfahren

Friedrich-Alexander Universität Erlangen-Nürnberg
Jan Spieck

Aufgabe 3 – Quine/ McCluskey

- Quine - McCluskey

Verfahren:

1) Alle Don‘t Cares werden als 1 angenommen und berücksichtigt
2) Bilden einer disjunktiven Normalform (Sinn: aller Terme haben gleich viele Literale, landen ergo in derselben Klasse)
3) Einteilung der Implikanten zu Klassen $Q_{i,\,j}$ (i: Anzahl Literale, j: Anzahl negierter Literale). Beispiel: $Q_{4,\,0}$ = abcd, abde, …
4) Reduktion zweier benachbarter Klassen $Q_{i,\,j}$ und $Q_{i,\,j-1}$ mit Hilfe des Distributivgesetzes. (Reduktionsregel: $xy + x\bar{y} = x$)
5) Wird auf tieferen Ebenen (kleineres i) wiederholt, bis keine Verkürzung möglich
6) Alle beim Zusammenfassen unberücksichtigten Terme, die nicht nur Don‘t Cares überdecken, sind die gesuchten Primimplikanten

Friedrich-Alexander Universität Erlangen-Nürnberg
Jan Spieck

Aufgabe 3 – Quine/ McCluskey

- Quine - McCluskey

Verfahren:

1) Alle Don‘t Cares werden als 1 angenommen und berücksichtigt ✓
2) Bilden einer disjunktiven Normalform (Sinn: aller Terme haben gleich viele Literale, landen ergo in derselben Klasse)
3) Einteilung der Implikanten zu Klassen $Q_{i,\,j}$ (i: Anzahl Literale, j: Anzahl negierter Literale). Beispiel: $Q_{4,\,0}$ = abcd, abde, …
4) Reduktion zweier benachbarter Klassen $Q_{i,\,j}$ und $Q_{i,\,j\text{-}1}$ mit Hilfe des Distributivgesetzes. (Reduktionsregel: $xy + x\bar{y} = x$)
5) Wird auf tieferen Ebenen (kleineres i) wiederholt, bis keine Verkürzung möglich
6) Alle beim Zusammenfassen unberücksichtigten Terme, die nicht nur Don‘t Cares überdecken, sind die gesuchten Primimplikanten

Friedrich-Alexander Universität Erlangen-Nürnberg
Jan Spieck

Aufgabe 3 – Quine/ McCluskey

Hex	D C B A	a
0	0 0 0 0	1
1	0 0 0 1	0
2	0 0 1 0	1
3	0 0 1 1	1
4	0 1 0 0	0
5	0 1 0 1	1
6	0 1 1 0	1
7	0 1 1 1	1
8	1 0 0 0	1
9	1 0 0 1	1
A	1 0 1 0	1
B	1 0 1 1	0
C	1 1 0 0	0
D	1 1 0 1	0
E	1 1 1 0	1
F	1 1 1 1	1

Aufstellen der DNF:

Prinzip: Auslesen aller Einsstellen

DNF(a) = $\bar{A}\bar{B}\bar{C}\bar{D} + \bar{A}B\bar{C}\bar{D} + AB\bar{C}\bar{D} + A\bar{B}C\bar{D}$

$+ \bar{A}BC\bar{D} + ABC\bar{D} + \bar{A}\bar{B}\bar{C}D + A\bar{B}\bar{C}D$

$+ \bar{A}B\bar{C}D + \bar{A}BCD + ABCD$

Friedrich-Alexander Universität Erlangen-Nürnberg
Jan Spieck

Aufgabe 3 – Quine/ McCluskey

- Quine - McCluskey

Verfahren:

1) Alle Don‘t Cares werden als 1 angenommen und berücksichtigt ✓
2) Bilden einer disjunktiven Normalform (Sinn: aller Terme haben gleich viele Literale, landen ergo in derselben Klasse) ✓
3) Einteilung der Implikanten zu Klassen $Q_{i,\,j}$ (i: Anzahl Literale, j: Anzahl negierter Literale). Beispiel: $Q_{4,\,0}$ = abcd, abde, …
4) Reduktion zweier benachbarter Klassen $Q_{i,\,j}$ und $Q_{i,\,j-1}$ mit Hilfe des Distributivgesetzes. (Reduktionsregel: $xy + x\bar{y} = x$)
5) Wird auf tieferen Ebenen (kleineres i) wiederholt, bis keine Verkürzung möglich
6) Alle beim Zusammenfassen unberücksichtigten Terme, die nicht nur Don‘t Cares überdecken, sind die gesuchten Primimplikanten

Friedrich-Alexander Universität Erlangen-Nürnberg
Jan Spieck

Aufgabe 3 – Quine/ McCluskey

Bestimmen der Klassen:

DNF(a) = $\bar{A}\bar{B}\bar{C}\bar{D} + \bar{A}B\bar{C}\bar{D} + AB\bar{C}\bar{D} + A\bar{B}C\bar{D} + \bar{A}BC\bar{D} + ABC\bar{D} + \bar{A}\bar{B}\bar{C}D + A\bar{B}\bar{C}D$
$+ \bar{A}B\bar{C}D + \bar{A}BCD + ABCD$

$Q_{4,4}$: $\{(\bar{A}\bar{B}\bar{C}\bar{D})\}$

$Q_{4,3}$: $\{(\bar{A}B\bar{C}\bar{D}), (\bar{A}\bar{B}\bar{C}D)\}$

$Q_{4,2}$: $\{(AB\bar{C}\bar{D}), (A\bar{B}C\bar{D}), (\bar{A}BC\bar{D}), (A\bar{B}\bar{C}D), (\bar{A}B\bar{C}D)\}$

$Q_{4,1}$: $\{(ABC\bar{D}), (\bar{A}BCD)\}$

$Q_{4,0}$: $\{(ABCD)\}$

Runde Klammern nicht notwendig!

Friedrich-Alexander Universität Erlangen-Nürnberg
Jan Spieck

Aufgabe 3 – Quine/ McCluskey

- Quine - McCluskey

Verfahren:

1) Alle Don‘t Cares werden als 1 angenommen und berücksichtigt ✓
2) Bilden einer disjunktiven Normalform (Sinn: aller Terme haben gleich viele Literale, landen ergo in derselben Klasse) ✓
3) Einteilung der Implikanten zu Klassen $Q_{i,\,j}$ (i: Anzahl Literale, j: Anzahl negierter Literale). Beispiel: $Q_{4,\,0}$ = abcd, abde, … ✓
4) Reduktion zweier benachbarter Klassen $Q_{i,\,j}$ und $Q_{i,\,j-1}$ mit Hilfe des Distributivgesetzes. (Reduktionsregel: $xy + x\bar{y} = x$)
5) Wird auf tieferen Ebenen (kleineres i) wiederholt, bis keine Verkürzung möglich
6) Alle beim Zusammenfassen unberücksichtigten Terme, die nicht nur Don‘t Cares überdecken, sind die gesuchten Primimplikanten

Friedrich-Alexander Universität Erlangen-Nürnberg
Jan Spieck

Aufgabe 3 – Quine/ McCluskey

Reduktion mit Hilfe des Distributivgesetzes:

$Q_{4,4}$: $\{(\bar{A}\bar{B}\bar{C}\bar{D})\}$
$Q_{4,3}$: $\{(\bar{A}B\bar{C}\bar{D}), (\bar{A}\bar{B}\bar{C}D)\}$

$Q_{3,3} = \{(\bar{A}\bar{C}\bar{D}), (\bar{A}\bar{B}\bar{C})\}$

$Q_{4,3}$: $\{(\bar{A}B\bar{C}\bar{D}), (\bar{A}\bar{B}\bar{C}D)\}$
$Q_{4,2}$: $\{(AB\bar{C}\bar{D}), (A\bar{B}C\bar{D}), (\bar{A}BC\bar{D}), (A\bar{B}\bar{C}D), (\bar{A}B\bar{C}D)\}$

$Q_{3,2} = \{(B\bar{C}\bar{D}), (\bar{A}B\bar{D}), (\bar{A}B\bar{C}), (\bar{B}\bar{C}D), (\bar{A}\bar{C}D)\}$

$Q_{4,2}$: $\{(AB\bar{C}\bar{D}), (A\bar{B}C\bar{D}), (\bar{A}BC\bar{D}), (A\bar{B}\bar{C}D), (\bar{A}B\bar{C}D)\}$
$Q_{4,1}$: $\{(ABC\bar{D}), (\bar{A}BCD)\}$

$Q_{3,1} = \{(AB\bar{D}), (AC\bar{D}), (BC\bar{D}), (\bar{A}BC), (\bar{A}BD)\}$

$Q_{4,1}$: $\{(ABC\bar{D}), (\bar{A}BCD)\}$
$Q_{4,0}$: $\{(ABCD)\}$

$Q_{3,0} = \{(ABC), (BCD)\}$

Friedrich-Alexander Universität Erlangen-Nürnberg
Jan Spieck

Aufgabe 3 – Quine/ McCluskey

- Quine - McCluskey

Verfahren:

1) Alle Don‘t Cares werden als 1 angenommen und berücksichtigt ✓
2) Bilden einer disjunktiven Normalform (Sinn: aller Terme haben gleich viele Literale, landen ergo in derselben Klasse) ✓
3) Einteilung der Implikanten zu Klassen $Q_{i,\,j}$ (i: Anzahl Literale, j: Anzahl negierter Literale). Beispiel: $Q_{4,\,0}$ = abcd, abde, … ✓
4) Reduktion zweier benachbarter Klassen $Q_{i,\,j}$ und $Q_{i,\,j-1}$ mit Hilfe des Distributivgesetzes. (Reduktionsregel: $xy + x\bar{y} = x$) ✓
5) Wird auf tieferen Ebenen (kleineres i) wiederholt, bis keine Verkürzung möglich
6) Alle beim Zusammenfassen unberücksichtigten Terme, die nicht nur Don‘t Cares überdecken, sind die gesuchten Primimplikanten

Friedrich-Alexander Universität Erlangen-Nürnberg
Jan Spieck

Aufgabe 3 – Quine/ McCluskey

Reduktion mit Hilfe des Distributivgesetzes:

$Q_{3,3}$: $\{(\bar{A}\bar{C}\bar{D}), (\bar{A}\bar{B}\bar{C})\}$

$Q_{3,2}$: $\{(B\bar{C}\bar{D}), (\bar{A}B\bar{D}), (\bar{A}B\bar{C}), (\bar{B}\bar{C}D), (\bar{A}\bar{C}D)\}$

$Q_{2,2} = \{(\bar{A}\bar{C}), (\bar{A}\bar{C})\} = \{(\bar{A}\bar{C})\}$

$Q_{3,2}$: $\{(B\bar{C}\bar{D}), (\bar{A}B\bar{D}), (\bar{A}B\bar{C}), (\bar{B}\bar{C}D), (\bar{A}\bar{C}D)\}$

$Q_{3,1}$: $\{(AB\bar{D}), (AC\bar{D}), (BC\bar{D}), (\bar{A}BC), (\bar{A}BD)\}$

$Q_{2,1} = \{(B\bar{D}), (B\bar{D}), (\bar{A}B)\} = \{(B\bar{D}), (\bar{A}B)\}$

$Q_{3,1}$: $\{(AB\bar{D}), (AC\bar{D}), (BC\bar{D}), (\bar{A}BC), (\bar{A}BD)\}$

$Q_{3,0}$: $\{(ABC), (BCD)\}$

$Q_{2,0} = \{(BC), (BC)\} = \{(BC)\}$

Wir sind fertig, da die Klassen Q_2 sich nicht weiter reduzieren lassen.

Friedrich-Alexander Universität Erlangen-Nürnberg
Jan Spieck

Aufgabe 3 – Quine/ McCluskey

- Quine - McCluskey

Verfahren:

1) Alle Don‘t Cares werden als 1 angenommen und berücksichtigt ✓
2) Bilden einer disjunktiven Normalform (Sinn: aller Terme haben gleich viele Literale, landen ergo in derselben Klasse) ✓
3) Einteilung der Implikanten zu Klassen $Q_{i,\,j}$ (i: Anzahl Literale, j: Anzahl negierter Literale). Beispiel: $Q_{4,\,0}$ = abcd, abde, … ✓
4) Reduktion zweier benachbarter Klassen $Q_{i,\,j}$ und $Q_{i,\,j-1}$ mit Hilfe des Distributivgesetzes. (Reduktionsregel: $xy + x\bar{y} = x$) ✓
5) Wird auf tieferen Ebenen (kleineres i) wiederholt, bis keine Verkürzung möglich ✓
6) Alle beim Zusammenfassen unberücksichtigten Terme, die nicht nur Don‘t Cares überdecken, sind die gesuchten Primimplikanten

Friedrich-Alexander Universität Erlangen-Nürnberg
Jan Spieck

Aufgabe 3 – Quine/ McCluskey

Klasse Q_4: keine unberücksichtigten Terme

$Q_{4,4}$: $\{(\bar{A}\bar{B}\bar{C}\bar{D})\}$

$Q_{4,3}$: $\{(\bar{A}B\bar{C}\bar{D}), (\bar{A}\bar{B}\bar{C}D)\}$

$Q_{3,3} = \{(\bar{A}\bar{C}\bar{D}), (\bar{A}\bar{B}\bar{C})\}$

$Q_{4,3}$: $\{(\bar{A}B\bar{C}\bar{D}), (\bar{A}\bar{B}\bar{C}D)\}$

$Q_{4,2}$: $\{(AB\bar{C}\bar{D}), (A\bar{B}C\bar{D}), (\bar{A}BC\bar{D}), (A\bar{B}\bar{C}D), (\bar{A}B\bar{C}D)\}$

$Q_{3,2} = \{(B\bar{C}\bar{D}), (\bar{A}B\bar{D}), (\bar{A}B\bar{C}), (\bar{B}\bar{C}D), (\bar{A}\bar{C}D)\}$

$Q_{4,2}$: $\{(AB\bar{C}\bar{D}), (A\bar{B}C\bar{D}), (\bar{A}BC\bar{D}), (A\bar{B}\bar{C}D), (\bar{A}B\bar{C}D)\}$

$Q_{4,1}$: $\{(ABC\bar{D}), (\bar{A}BCD)\}$

$Q_{3,1} = \{(AB\bar{D}), (AC\bar{D}), (BC\bar{D}), (\bar{A}BC), (\bar{A}BD)\}$

$Q_{4,1}$: $\{(ABC\bar{D}), (\bar{A}BCD)\}$

$Q_{4,0}$: $\{(ABCD)\}$

$Q_{3,0} = \{(ABC), (BCD)\}$

Friedrich-Alexander Universität Erlangen-Nürnberg
Jan Spieck

Aufgabe 3 – Quine/ McCluskey

Klasse Q_3:

$$\left.\begin{array}{ll} Q_{3,3}: & \{(\bar{A}\bar{C}\bar{D}), (\bar{A}\bar{B}\bar{C})\} \\ Q_{3,2}: & \{(B\bar{C}\bar{D}), (\bar{A}B\bar{D}), (\bar{A}B\bar{C}), (\bar{B}\bar{C}D), (\bar{A}\bar{C}D)\} \end{array}\right\} Q_{2,2} = \{(\bar{A}\bar{C}), (\bar{A}\bar{C})\} = \{(\bar{A}\bar{C})\}$$

$$\updownarrow$$

$$\left.\begin{array}{ll} Q_{3,2}: & \{(B\bar{C}\bar{D}), (\bar{A}B\bar{D}), (\bar{A}B\bar{C}), (\bar{B}\bar{C}D), (\bar{A}\bar{C}D)\} \\ Q_{3,1}: & \{(AB\bar{D}), (AC\bar{D}), (BC\bar{D}), (\bar{A}BC), (\bar{A}BD)\} \end{array}\right\} Q_{2,1} = \{(B\bar{D}), (B\bar{D}), (\bar{A}B)\} = \{(B\bar{D}), (\bar{A}B)\}$$

$$\updownarrow$$

$$\left.\begin{array}{ll} Q_{3,1}: & \{(AB\bar{D}), (AC\bar{D}), (BC\bar{D}), (\bar{A}BC), (\bar{A}BD)\} \\ Q_{3,0}: & \{(ABC), (BCD)\} \end{array}\right\} Q_{2,0} = \{(BC), (BC)\} = \{(BC)\}$$

Es gibt zwei Primimplikanten der Klasse Q_3 und vier der Klasse Q_2 (nämlich alle!).

Primimplikanten: $\bar{B}\bar{C}D,\ AC\bar{D},\ \bar{A}\bar{C},\ B\bar{D},\ \bar{A}B,\ BC$

Friedrich-Alexander Universität Erlangen-Nürnberg
Jan Spieck

Aufgabe 3 – Quine/ McCluskey

- Alternative Quine/ McClusky-Darstellung

$Q_{4,4}$: $\{(\bar{A}\bar{B}\bar{C}\bar{D})\}$
$Q_{4,3}$: $\{(A\bar{B}\bar{C}\bar{D}), (\bar{A}\bar{B}\bar{C}D)\}$
$Q_{4,2}$: $\{(AB\bar{C}\bar{D}), (A\bar{B}C\bar{D}), (\bar{A}BC\bar{D}), (A\bar{B}\bar{C}D), (\bar{A}B\bar{C}D)\}$
$Q_{4,1}$: $\{(ABC\bar{D}), (\bar{A}BCD)\}$
$Q_{4,0}$: $\{(ABCD)\}$

↓

$Q_{4,4}$: {0000}
$Q_{4,3}$: {0100, 0001}
$Q_{4,2}$: {1100, 1010, 0110, 1001, 0101}
$Q_{4,1}$: {1110, 0111}
$Q_{4,0}$: {1111}

←

Hex	D C B A	a
0	0 0 0 0	1
1	0 0 0 1	0
2	0 0 1 0	1
3	0 0 1 1	1
4	0 1 0 0	0
5	0 1 0 1	1
6	0 1 1 0	1
7	0 1 1 1	1
8	1 0 0 0	1
9	1 0 0 1	1
A	1 0 1 0	1
B	1 0 1 1	0
C	1 1 0 0	0
D	1 1 0 1	0
E	1 1 1 0	1
F	1 1 1 1	1

Friedrich-Alexander Universität Erlangen-Nürnberg
Jan Spieck

Aufgabe 3 – Quine/ McCluskey

- Alternative Quine/ McClusky-Darstellung

$Q_{4,4}$: {0000}
$Q_{4,3}$: {0100, 0001}
$Q_{4,2}$: {1100, 1010, 0110, 1001, 0101}
$Q_{4,1}$: {1110, 0111}
$Q_{4,0}$: {1111}

↓

$Q_{3,3}$: {0-00, 000-}
$Q_{3,2}$: {-100, 01-0, 010-, -001, 0-01}
$Q_{3,1}$: {11-0, 1-10, -110, 011-, 01-1}
$Q_{3,0}$: {111-, -111}

↓

$Q_{2,2}$: {0-0-, 0--0}
$Q_{2,1}$: {-1-0, 01--}
$Q_{2,0}$: {-11-}

Friedrich-Alexander Universität Erlangen-Nürnberg
Jan Spieck

Aufgabe 3 – Quine/ McCluskey

Lösen per Überdeckungstabellen:

Primimplikanten: $\bar{B}\bar{C}D,\ AC\bar{D},\ \bar{A}\bar{C},\ B\bar{D},\ \bar{A}B,\ BC$

	0	**2**	**3**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**A**	**E**	**F**
$\bar{B}\bar{C}D$				1		1					
$AC\bar{D}$							1	1			
$\bar{A}\bar{C}$	1	1					1		1		
$B\bar{D}$		1	1		1	1					
$\bar{A}B$		1			1				1	1	
BC					1	1				1	1

Friedrich-Alexander Universität Erlangen-Nürnberg
Jan Spieck

Aufgabe 3 – Quine/ McCluskey

Lösen per Überdeckungstabellen:

Anwenden der Kernimplikantenregel:

	0	2	3	5	6	7	8	9	A	E	F
$\cancel{\bar{B}\bar{C}D}$				1		1					
$\cancel{AC\bar{D}}$							1	1			
$\cancel{\bar{A}\bar{C}}$	1	1					1		1		
$\cancel{B\bar{D}}$		1	1		1	1					
$\bar{A}B$		1			1				1	1	
$\cancel{BC}$					1	1				1	1

Friedrich-Alexander Universität Erlangen-Nürnberg
Jan Spieck

Aufgabe 3 – Quine/ McCluskey

Lösen per Überdeckungstabellen:

Anwenden der Kernimplikantenregel:

	0	2	3	5	6	7	8	9	A	E	F
$\bar{B}\bar{C}D$				1		1					
$AC\bar{D}$							1	1			
$\bar{A}\bar{C}$	1	1					1		1		
$B\bar{D}$		1	1		1	1					
$\bar{A}B$		1			1				1	1	
BC					1	1				1	1

Alle Einstellen werden überdeckt (vertikal geschnitten). Wir benötigen dazu alle Primimplikanten mit Ausnahme des Termes $\bar{A}B$. Die restlichen Terme bilden unsere DMF

Friedrich-Alexander Universität Erlangen-Nürnberg
Jan Spieck

Aufgabe 4 - Relation

- In der Vorweihnachtszeit stellt sich die Frage, was besser ist: ewiges Glück oder ein Lebkuchenherz. Man sollte meinen:
- Nichts ist besser als ewiges Glück
- Ein Lebkuchenherz ist besser als nichts
- „Besser“ ist bekanntlich eine transitive Relation. Was folgt daraus?

Hinweis: an dieser Stelle ist ein gekünsteltes Lachen angebracht

Friedrich-Alexander Universität Erlangen-Nürnberg
Jan Spieck

Aufgabe 4 - Relation

- Begriffsklärung: Was ist Glück?

Aristoteles:	Glück als intrinsisches Endziel (später v.a. Epikur); Glück = polymorph (d.h. viele Güter (Freunde, Familie, …) führen gemeinsam zum Ziel) Berühmter Syllogismus: Glück liegt in der Eigenschaft, die uns von allen anderen unterscheidet (Tüchtigkeit der Seele (Cicero: ratio))
Camus:	Teleologisches Glücksmodell veraltet, deshalb Einführung eines deontologischen Glücksmodells (vgl. Sysyphos)
Nietzsche:	Glück wird indirekt erzielt (also nicht direkt angestrebt). Keine Schmerzvermeidung suchen, sondern höchste Intensität

Friedrich-Alexander Universität Erlangen-Nürnberg
Jan Spieck

Aufgabe 4 - Relation

- Nichts ist besser als ewiges Glück
- Ein Lebkuchenherz ist besser als nichts

Transitivität: $x * y \ \wedge y * z \ \rightarrow x * z$

$x \; besser \; y \ \wedge y \; besser \; z \ \rightarrow x \; besser \; z$

$\text{Lebkuchenherz} \; besser \; Nichts \ \wedge Nichts \; besser \; Gl\text{ü}ck$
$\rightarrow Lebkuchenherz \; besser \; Gl\text{ü}ck$

Friedrich-Alexander Universität Erlangen-Nürnberg
Jan Spieck

Vielen Dank für eure angenehme Aufmerksamkeit!

- Diesmal eine Zitat des Homer

Friedrich-Alexander Universität Erlangen-Nürnberg
Jan Spieck

Vielen Dank für eure angenehme Aufmerksamkeit!

- Diesmal eine Zitat des Homer

"βέλτερον ὃς φεύγων προφύγῃ κακὸν ἠὲ ἁλώῃ· "

Friedrich-Alexander Universität Erlangen-Nürnberg
Jan Spieck