

GTI – ÜBUNG 8

NELSON/PETRICK, QUINE/MCCLUSKEY, ÜBERDECKUNGSTABELLE

Aufgabe 1 – Nelson/Petrick

Beschreibung

- ▶ Gegeben sei die folgende Funktionstabelle

Achtung: die Codeworte sind einschrittig codiert, d.h. nicht aufsteigend

Aufgabe 1 – Nelson/Petrick

Dezimal	Oktal	x_4 x_3 x_2 x_1	$y_0(x)$	$y_1(X)$
0	00	0 0 0 0	0	0
1	01	0 0 0 1	0	0
3	03	0 0 1 1	1	1
2	02	0 0 1 0	1	1
6	06	0 1 1 0	1	0
7	07	0 1 1 1	1	1
5	05	0 1 0 1	1	1
4	04	0 1 0 0	0	0
12	14	1 1 0 0	1	1
13	15	1 1 0 1	1	0
15	17	1 1 1 1	1	1
14	16	1 1 1 0	1	1
10	12	1 0 1 0	1	1
11	13	1 0 1 1	1	1
9	11	1 0 0 1	1	1
8	10	1 0 0 0	1	1

Aufgabe 1 – Nelson/Petrick

Beschreibung

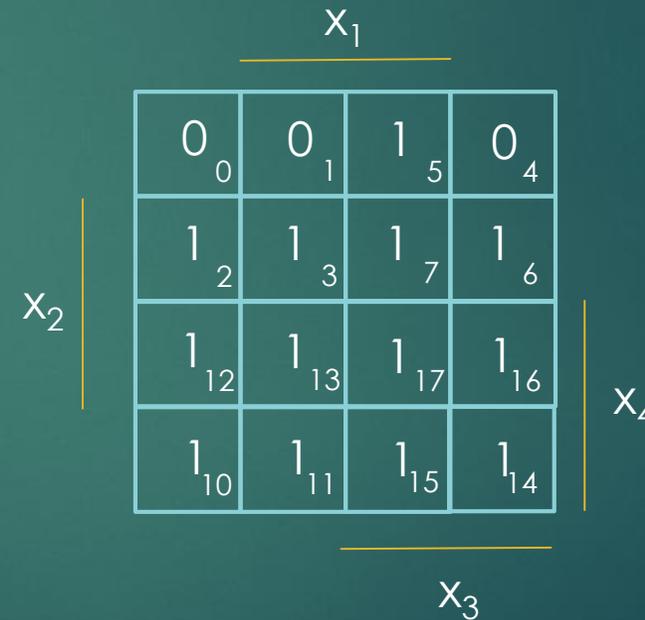
- ▶ Ermitteln Sie ein Konjunktive Minimalform (KMF) für die Funktion y_0 mit Hilfe eines Symmetriediagramms.

Hinweis: das Zeichnen eines SD sollte aus der letzten Übung bekannt sein
hier benötigen wir eine Nullstellenüberdeckung

Aufgabe 1 – Nelson/Petrick

Dezimal	Oktal	x_4	x_3	x_2	x_1	$y_0(x)$
0	00	0	0	0	0	0
1	01	0	0	0	1	0
3	03	0	0	1	1	1
2	02	0	0	1	0	1
6	06	0	1	1	0	1
7	07	0	1	1	1	1
5	05	0	1	0	1	1
4	04	0	1	0	0	0
12	14	1	1	0	0	1
13	15	1	1	0	1	1
15	17	1	1	1	1	1
14	16	1	1	1	0	1
10	12	1	0	1	0	1
11	13	1	0	1	1	1
9	11	1	0	0	1	1
8	10	1	0	0	0	1

► Wir ermitteln zuerst ein SD für die Funktion y_0 .



Aufgabe 1 – Nelson/Petrick

- ▶ Dann suchen wir alle Blöcke einer Nullstellenüberdeckung

Primimplikate:

$$(x_4 + x_3 + x_2), (x_4 + x_2 + x_1)$$

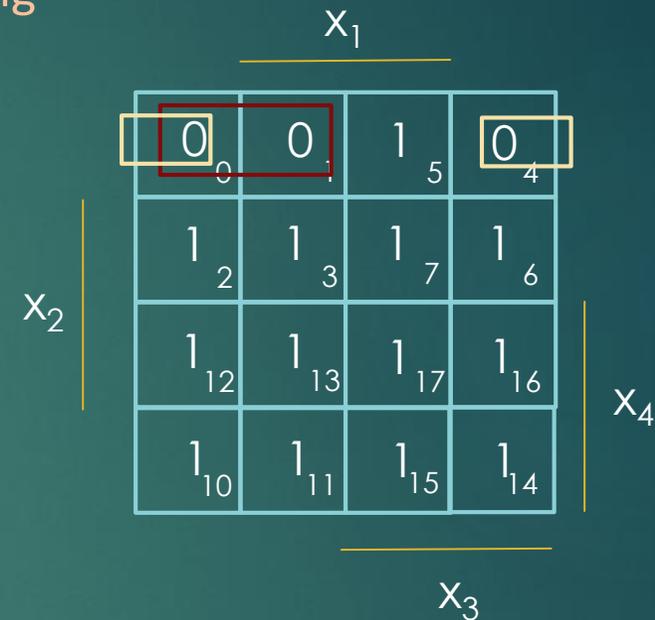
Achtung: Variablen negieren und verodern!
Dies ist genau das Gegenteil zu der DMF-Bestimmung.

Tipp: wie DMF auslesen und dann negieren (De Morgan)

z.B. $\overline{x_2} \overline{x_3} \overline{x_4} \rightarrow \overline{\overline{\overline{x_2} \overline{x_3} \overline{x_4}}} = x_2 + x_3 + x_4$

Alle Primimplikate sind Kerne, also lautet die KMF:

$$y_0 = (x_4 + x_3 + x_2) (x_4 + x_2 + x_1)$$



Aufgabe 1 – Nelson/Petrick

7

- ▶ Ermitteln Sie alle Primimplikanten für die Funktion y_0 mit Hilfe des Nelson – Verfahrens. Verwenden Sie dabei die berechneten Primimplikate.

Hinweis: Ausdistribuierten der Primimplikate

Aufgabe 1 – Nelson/Petrick

▶ Das Nelson – Verfahren

Ziel: algebraische Bestimmung aller Primimplikaten zur Bildung einer DMF

Vorgehen:

- Behandlung **aller Freistellen (Don't cares) als Einstellen**
- Bestimmung einer konjunktiven Form mittels Nullblocküberdeckung
- Umformen auf eine disjunktive Form mittels Distribution und Absorption
- Streichen aller Terme, die nur Freistelle (Don't cares) überdecken

Aufgabe 1 – Nelson/Petrick

- ▶ Wir wenden das Nelson-Verfahren an.

Vorgehen:

- Behandlung aller Freistellen (Don't cares) als Einsstellen ✓
- Bestimmung einer konjunktiven Form mittels Nullblocküberdeckung ✓
- Umformen auf eine disjunktive Form mittels Distribution und Absorption

$$\begin{aligned} y_0 &= (x_4 + x_3 + x_2) (x_4 + x_2 + x_1) && | \text{Distributivgesetz} \\ &= x_4 + x_2 + x_4x_3 + x_4x_2 + x_4x_1 + x_3x_2 + x_3x_1 + x_2x_1 && | \text{Absorption} \\ &= x_4 + x_2 + x_3x_1 \end{aligned}$$

- Streichen aller Terme, die nur Freistelle (Don't cares) überdecken

Keine Don't Cares vorhanden -> Lösung entspricht der Lösung des dritten Schritts

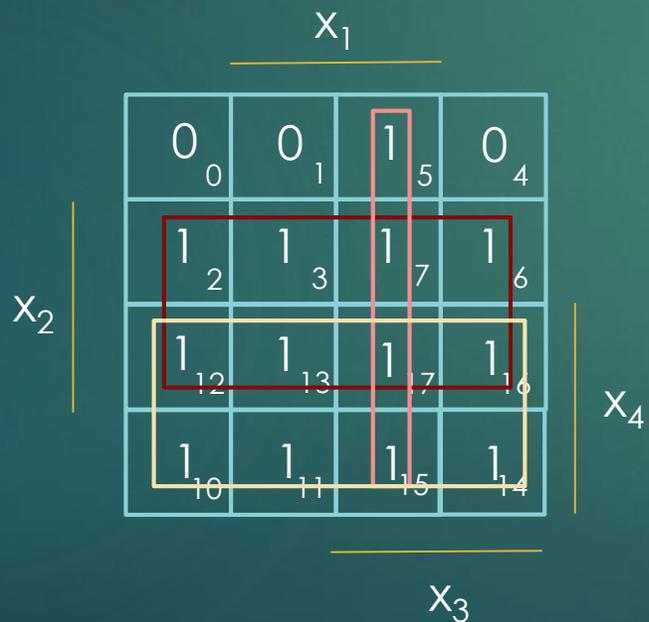
Aufgabe 1 – Nelson/Petrick

10

► Lösung

$$y_0 = x_4 + x_2 + x_3x_1$$

Überprüfen im Symmetriediagramm:



Aufgabe 1 – Nelson/Petrick

11

- ▶ Bestimmen Sie eine Disjunktive Minimalform (DMF) für die Funktion y_1 mit Hilfe des Nelson/Petrick – Verfahrens

Hinweis: Zuerst Nelson anwenden, dann Petrick (letzte Übung)

Aufgabe 1 – Nelson/Petrick

12

- ▶ Wir wenden das Nelson-Verfahren an.

Vorgehen:

- Behandlung aller Freistellen (Don't cares) als Einsstellen ✓
- Bestimmung einer konjunktiven Form mittels Nullblocküberdeckung
- Umformen auf eine disjunktive Form mittels Distribution und Absorption
- Streichen aller Terme, die nur Freistelle (Don't cares) überdecken

Aufgabe 1 – Nelson/Petrick

Dezimal	Oktal	$x_4 x_3 x_2 x_1$	$y_1(X)$
0	00	0 0 0 0	0
1	01	0 0 0 1	0
3	03	0 0 1 1	1
2	02	0 0 1 0	1
6	06	0 1 1 0	0
7	07	0 1 1 1	1
5	05	0 1 0 1	1
4	04	0 1 0 0	0
12	14	1 1 0 0	1
13	15	1 1 0 1	0
15	17	1 1 1 1	1
14	16	1 1 1 0	1
10	12	1 0 1 0	1
11	13	1 0 1 1	1
9	11	1 0 0 1	1
8	10	1 0 0 0	1

- ▶ Wir starten mit einer KNF, d.h. Verundung aller Nullterme

$$\begin{aligned} y_1 = & (x_4 + x_3 + x_2 + x_1) \cdot \\ & (x_4 + x_3 + x_2 + \bar{x}_1) \cdot \\ & (x_4 + \bar{x}_3 + x_2 + x_1) \cdot \\ & (x_4 + \bar{x}_3 + \bar{x}_2 + x_1) \cdot \\ & (\bar{x}_4 + \bar{x}_3 + x_2 + \bar{x}_1) \end{aligned}$$

Achtung: umgekehrte Negation und Oder

Aufgabe 1 – Nelson/Petrick

14

- ▶ Wir wenden das Nelson-Verfahren an.

Vorgehen:

- Behandlung aller Freistellen (Don't cares) als Einsstellen ✓
- Bestimmung einer konjunktiven Form mittels Nullblocküberdeckung ✓
- Umformen auf eine disjunktive Form mittels Distribution und Absorption
- Streichen aller Terme, die nur Freistelle (Don't cares) überdecken

Aufgabe 1 – Nelson/Petrick

15

- ▶ Wir starten mit einer KNF, d.h. Verundung aller Nullterme

$$\begin{aligned}y_1 &= (x_4 + x_3 + x_2 + x_1) \cdot (x_4 + x_3 + x_2 + \bar{x}_1) \cdot (x_4 + \bar{x}_3 + x_2 + x_1) \cdot \\ &\quad (x_4 + \bar{x}_3 + \bar{x}_2 + x_1) \cdot (\bar{x}_4 + \bar{x}_3 + x_2 + \bar{x}_1) && | \text{Distributivgesetz} \\ &= (x_4 + x_3 + x_2) \cdot (x_4 + \bar{x}_3 + x_1) \cdot (\bar{x}_4 + \bar{x}_3 + x_2 + \bar{x}_1) && | \text{Distributivgesetz + Abs.} \\ &= (x_4 + x_3 + x_2) \cdot (\bar{x}_3 + x_4x_2 + x_4\bar{x}_1 + \bar{x}_4x_1 + x_2x_1) && | \text{Distributivgesetz + Abs.} \\ &= x_4\bar{x}_3 + x_4x_2 + x_4\bar{x}_1 + \bar{x}_4x_3x_1 + \bar{x}_3x_2 + x_2x_1\end{aligned}$$

Aufgabe 1 – Nelson/Petrick

16

- ▶ Wir wenden das Nelson-Verfahren an.

Vorgehen:

- Behandlung aller Freistellen (Don't cares) als Einsstellen ✓
- Bestimmung einer konjunktiven Form mittels Nullblocküberdeckung ✓
- Umformen auf eine disjunktive Form mittels Distribution und Absorption ✓
- Streichen aller Terme, die nur Freistelle (Don't cares) überdecken ✓

Da keine Don't Cares enthalten!

Also auf zum Petrick – Verfahren.

Aufgabe 1 – Nelson/Petrick

► Begriffsklärung

überdeckte Einsen z.B. als

Terme der Einsenüberdeckung

Dezimal- / Oktalzahlen (vgl. SD)

Kosten der Terme

Implikant	2	8	10	11	26	29	31	c_k
$\bar{e}\bar{c}b$	X		X	X				5
$\bar{e}ba$				X				5
$d\bar{c}b$			X	X	X			5
dba							X	5
dca						X	X	5
$\bar{c}a$	X	X	X		X			2
$\bar{e}d$		X	X	X				2

Aufgabe 1 – Nelson/Petrick

- Bilden einer Überdeckungstabelle

$$y_1 = x_4\bar{x}_3 + x_4x_2 + x_4\bar{x}_1 + \bar{x}_4x_3x_1 + \bar{x}_3x_2 + x_2x_1$$

Implikant	2	3	5	7	8	9	10	11	12	14	15	p_i	c_k
$x_4\bar{x}_3$					X	X	X	X				A	2
x_4x_2							X	X		X	X	B	2
$x_4\bar{x}_1$					X		X		X	X		C	2
$\bar{x}_4x_3x_1$			X	X								D	3
\bar{x}_3x_2	X	X					X	X				E	2
x_2x_1		X		X				X			X	F	2

Aufgabe 1 – Nelson/Petrick

► Bilden des Petrick – Ausdruckes

Implikant	2	3	5	7	8	9	10	11	12	14	15	p_i	c_k
$x_4\bar{x}_3$					X	X	X	X				A	2
x_4x_2							X	X		X	X	B	2
$x_4\bar{x}_1$					X		X		X	X		C	2
$\bar{x}_4x_3x_1$			X	X								D	3
\bar{x}_3x_2	X	X					X	X				E	2
x_2x_1		X		X				X			X	F	2

Dazu: Disjunktion der spaltenweise konjugierten Implikanten

$$PA = E (E + F) D (D + F) (A + C) A (A + B + C + E) (A + B + E + F) C (B + C) (B + F) = 1$$

Aufgabe 1 – Nelson/Petrick

20

► Vereinfachen des Petrick – Ausdruckes

Zuerst Anwendung der Absorption, dann Anwendung des Distributivgesetzes:

$$\begin{aligned} PA &= E (E + F) D (D + F) (A + C) A (A + B + C + E) (A + B + E + F) C (B + C) (B + F) \\ &= E D A C (B + F) \\ &= ABCDE + ACDEF \end{aligned}$$

Beide Ausdrücke kosten gleich viel (Primäre Kosten: 11, Sekundäre Kosten: 5)

$$\text{ABCDE:} \quad x_4 \bar{x}_3 + x_4 x_2 + x_4 \bar{x}_1 + \bar{x}_4 x_3 x_1 + \bar{x}_3 x_2$$

$$\text{ACDEF:} \quad x_4 \bar{x}_3 + x_4 \bar{x}_1 + x_2 x_1 + \bar{x}_4 x_3 x_1 + \bar{x}_3 x_2$$

Aufgabe 2 – Überdeckungstabelle

- ▶ Lösen Sie das folgende Überdeckungsproblem tabellarisch mittels einer Überdeckungstabelle und unter Angabe der verwendeten Regeln. Geben Sie zudem eine DMF der Schaltfunktion $g(e, d, c, b, a)$ an.

Implikant	2	8	10	11	26	29	31	c_k
$\bar{e}\bar{c}b$	X		X	X				5
$\bar{e}ba$				X				5
$d\bar{c}b$			X	X	X			5
dba							X	5
dca						X	X	5
$\bar{c}a$	X	X	X		X			2
$\bar{e}d$		X	X	X				2

Aufgabe 2 – Überdeckungstabelle

22

► Begriffsklärung

Überdeckungstabelle:

- Anwendung nach dem Bestimmen aller Primterme (z.B. durch SD oder Nelson)
- Graphische Alternative zum algebraischen Petrickverfahren
- Minimierung des logischen Ausdrucks durch optimale Selektion der Primterme, die zu einer vollständigen Überdeckung aller Einstellen führt.

Algorithmus:

Wiederhole solange, bis keine Schritte mehr anwendbar sind:

- 1: Regel der Kernimplikanten (Spalte + Schnittspalten streichen)
- 2: Regel der Spaltendominanz (dominierende Spalte streichen)
- 3: Regel der Zeilendominanz (dominierte Zeile streichen)

Aufgabe 2 – Überdeckungstabelle

23

► Begriffsklärung

Kernimplikant (Kernterm):

- Primterm, der eine 1 überdeckt, die kein anderer Primterm überdeckt
- In der ÜT erkennbar durch nur einen Eintrag in einer Spalte
- Müssen in die Überdeckungslösung aufgenommen werden

k	0	2	3	5
1			X	X
2	X		X	X
3		X		
4	X			X

Aufgabe 2 – Überdeckungstabelle

24

► Begriffsklärung

Spaltendominanz:

- Spalten, die andere Spalten dominieren, können gestrichen werden
- Sei Spalte L_1 Teilmenge einer Spalte L_2 ($L_1 \subset L_2$), so kann L_2 gestrichen werden (Grund: wird L_1 beliebig überdeckt, so auch automatisch L_2)

Beispiel: 3 wird von 5 dominiert, 0 wird von 5 dominiert

k	0	2	3	5
1			X	X
2	X		X	X
3		X		
4	X			X

Aufgabe 2 – Überdeckungstabelle

Zeilendominanz:

- Dominierte Zeilen können, falls keine zusätzlichen Kosten entstehen oder keine Zeilen existieren, welche die restlichen Einstellen überdecken können, und weniger als die Kostendifferenz kosten, gestrichen werden
- Sei Zeile L_1 (mit Kosten c_1) echte Teilmenge einer Zeile L_2 (mit Kosten c_2) ($L_1 \subset L_2$), so kann L_1 gestrichen werden, falls $c_2 \leq c_1$ gilt oder keine Zeile existiert, welche die restlichen Einstellen von L_1 überdecken kann und weniger als $c_2 - c_1$ kosten
- **Beispiel A:** 2 dominiert 1 bei gleichen Kosten

k	0	2	3	5	c_k
1			X	X	2
2	X		X	X	2
3		X			3
4	X			X	1

Aufgabe 2 – Überdeckungstabelle

Zeilendominanz:

- **Beispiel B:** 2 dominiert 1 bei größeren Kosten von 2, aber es existiert keine Kombination aus 1 und zusätzlichen Zeilen, die weniger als $c_2 - c_1 = 1$ kostet und alle Spalten (Einstellen) von 2 überdeckt. Die Kombination 1 + 4 ist zu teuer, da $c_4 = 2 > c_2 - c_1 = 1$

k	0	2	3	5	c_k
1			X	X	2
2	X		X	X	3
3		X			3
4	X			X	2

Aufgabe 2 – Überdeckungstabelle

27

Zeilendominanz:

- **Beispiel C:** 2 dominiert 1 bei größeren Kosten von 2, aber es existiert eine Kombination aus 1 und zusätzlichen Zeilen, die gleich viel wie $c_2 - c_1 = 1$ kostet und alle Spalten (Einstellen) von 2 überdeckt. Dies ist die Kombination 1 + 4, da $c_4 = 1 = c_2 - c_1$. Es wird keine Zeile gestrichen!

k	0	2	3	5	c_k
1			X	X	2
2	X		X	X	3
3		X			3
4	X			X	1

Aufgabe 2 – Überdeckungstabelle

Zeilendominanz:

- **Beispiel D:** 2 dominiert 1 bei größeren Kosten von 2 und es existiert eine Kombination aus 1 und zusätzlichen Zeilen, die weniger als $c_2 - c_1 = 1$ kostet und alle Spalten (Einstellen) von 2 überdeckt: die Kombination 1 + 4, da $c_4 = 1 < 2 = c_2 - c_1$. Es wird Zeile 2 gestrichen! (Zeilenabsorptionsregel)

k	0	2	3	5	c_k
1			X	X	2
2	X		X	X	4
3		X			3
4	X			X	1

Aufgabe 2 – Überdeckungstabelle

29

- ▶ Lösen Sie das folgende Überdeckungsproblem tabellarisch

Schritt 1 (Kernimplikant): Kernimplikant dca , deshalb 29 streichen + Schnittspalte 31

Implikant	2	8	10	11	26	29	31	c_k
$\bar{e}\bar{c}b$	X		X	X				5
$\bar{e}ba$				X				5
$d\bar{c}b$			X	X	X			5
dba							X	5
dca						X	X	5
$\bar{c}a$	X	X	X		X			2
$\bar{e}d$		X	X	X				2

Aufgabe 2 – Überdeckungstabelle

30

- ▶ Lösen Sie das folgende Überdeckungsproblem tabellarisch

Schritt 2 (Spaltendominanz): 10 dominiert Spalte 2, 8 und 26 -> streichen

Implikant	2	8	10	11	26	29	31	c_k
$\bar{e}\bar{c}b$	X		X	X				5
$\bar{e}ba$				X				5
$d\bar{c}b$			X	X	X			5
dba							X	5
dca						X	X	5
$\bar{c}a$	X	X	X		X			2
$\bar{e}d$		X	X	X				2

Aufgabe 2 – Überdeckungstabelle

31

- ▶ Lösen Sie das folgende Überdeckungsproblem tabellarisch

Schritt 3 (Zeilendominanz): $\bar{e}ba$ dominiert von Zeilen $\bar{e}\bar{c}b$ und $d\bar{c}b$ -> streichen

Implikant	2	8	10	11	26	29	31	c_k
$\bar{e}\bar{c}b$	X		X	X				5
$\bar{e}ba$				X				5
$d\bar{c}b$			X	X	X			5
dba							X	5
dca						X	X	5
$\bar{c}a$	X	X	X		X			2
$\bar{e}d$		X	X	X				2

Aufgabe 2 – Überdeckungstabelle

32

- ▶ Lösen Sie das folgende Überdeckungsproblem tabellarisch

Resttabelle leicht lösbar, da Einsatz geringer Kosten c_k bevorzugt (scharfes Hinsehen)

Implikant	2	8	10	11	26	29	31	c_k
$\bar{e}\bar{c}b$	X		X	X				5
$\bar{e}ba$				X				5
$d\bar{c}b$			X	X	X			5
dba							X	5
dca						X	X	5
$\bar{c}a$	X	X	X		X			→ 2
$\bar{e}d$		X	X	X				→ 2

Aufgabe 2 – Überdeckungstabelle

- ▶ Geben Sie zudem eine DMF der Schaltfunktion $g(e, d, c, b, a)$ an.

DMF: $g(e, d, c, b, a) = acd + a\bar{c} + d\bar{e}$

Implikant	2	8	10	11	26	29	31	c_k
$\bar{e}\bar{c}b$	X		X	X				5
$\bar{e}ba$				X				5
$d\bar{c}b$			X	X	X			5
dba							X	5
→ dca						X	X	5
→ $\bar{c}a$	X	X	X		X			2
→ $\bar{e}d$		X	X	X				2

Aufgabe 3 – Quine/ McCluskey

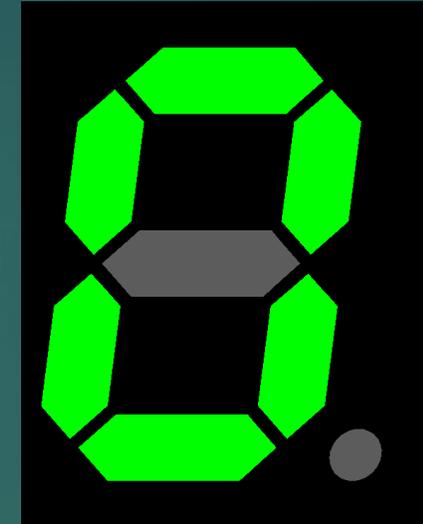
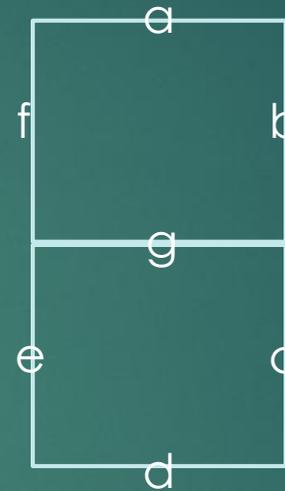
34

► Beschreibung

Optimieren Sie mit Hilfe des Verfahrens von Quine und McCluskey die Schaltfunktion, die den Hexcode (D C B A) für den Leuchtbalken a einer Siebensegmentanzeige umcodiert.

Aufgabe 3 – Quine/ McCluskey

Hex	DCBA	abcdefg
0	0 0 0 0	1 1 1 1 1 1 0
1	0 0 0 1	0 1 1 0 0 0 0
2	0 0 1 0	1 1 0 1 1 0 1
3	0 0 1 1	1 1 1 1 0 0 1
4	0 1 0 0	0 1 1 0 0 1 1
5	0 1 0 1	1 0 1 1 0 1 1
6	0 1 1 0	1 0 1 1 1 1 1
7	0 1 1 1	1 1 1 0 0 0 0
8	1 0 0 0	1 1 1 1 1 1 1
9	1 0 0 1	1 1 1 1 0 1 1
A	1 0 1 0	1 1 1 0 1 1 1
B	1 0 1 1	0 0 1 1 1 1 1
C	1 1 0 0	0 0 0 1 1 0 1
D	1 1 0 1	0 1 1 1 1 0 1
E	1 1 1 0	1 0 0 1 1 1 1
F	1 1 1 1	1 0 0 0 1 1 1



http://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/2/2b/Seven_segment_display-animated.gif

Aufgabe 3 – Quine/ McCluskey

36

► Verfahren im Vergleich

Bestimmen aller Primimplikanten:

- Symmetriediagramme
- Nelson – Verfahren
- Quine/McCluskey – Verfahren

Kostenminimale Auswahl der Primimplikanten:

- Symmetriediagramme
- Überdeckungstabelle
- Petrick – Verfahren

Aufgabe 3 – Quine/ McCluskey

37

▶ Quine - McCluskey

Verfahren:

- 1) Alle Don't Cares werden als 1 angenommen und berücksichtigt
- 2) Bilden einer disjunktiven Normalform (Sinn: aller Terme haben gleich viele Literale, landen ergo in derselben Klasse)
- 3) Einteilung der Implikanten zu Klassen $Q_{i,j}$ (i : Anzahl Literale, j : Anzahl negierter Literale). Beispiel: $Q_{4,0} = abcd, abde, \dots$
- 4) Reduktion zweier benachbarter Klassen $Q_{i,j}$ und $Q_{i,j-1}$ mit Hilfe des Distributivgesetzes. (Reduktionsregel: $xy + x\bar{y} = x$)
- 5) Wird auf tieferen Ebenen (kleineres i) wiederholt, bis keine Verkürzung möglich
- 6) Alle beim Zusammenfassen unberücksichtigten Terme, die nicht nur Don't Cares überdecken, sind die gesuchten Primimplikanten

Aufgabe 3 – Quine/ McCluskey

38

▶ Quine - McCluskey

Verfahren:

- 1) Alle Don't Cares werden als 1 angenommen und berücksichtigt ✓
- 2) Bilden einer disjunktiven Normalform (Sinn: aller Terme haben gleich viele Literale, landen ergo in derselben Klasse)
- 3) Einteilung der Implikanten zu Klassen $Q_{i,j}$ (i: Anzahl Literale, j: Anzahl negierter Literale). Beispiel: $Q_{4,0} = abcd, abde, \dots$
- 4) Reduktion zweier benachbarter Klassen $Q_{i,j}$ und $Q_{i,j-1}$ mit Hilfe des Distributivgesetzes. (Reduktionsregel: $xy + x\bar{y} = x$)
- 5) Wird auf tieferen Ebenen (kleineres i) wiederholt, bis keine Verkürzung möglich
- 6) Alle beim Zusammenfassen unberücksichtigten Terme, die nicht nur Don't Cares überdecken, sind die gesuchten Primimplikanten

Aufgabe 3 – Quine/ McCluskey

Hex	D C B A	a
0	0 0 0 0	1
1	0 0 0 1	0
2	0 0 1 0	1
3	0 0 1 1	1
4	0 1 0 0	0
5	0 1 0 1	1
6	0 1 1 0	1
7	0 1 1 1	1
8	1 0 0 0	1
9	1 0 0 1	1
A	1 0 1 0	1
B	1 0 1 1	0
C	1 1 0 0	0
D	1 1 0 1	0
E	1 1 1 0	1
F	1 1 1 1	1

Aufstellen der DNF:

Prinzip: Auslesen aller Einstellen

$$\begin{aligned} \text{DNF}(a) = & \bar{A}\bar{B}\bar{C}\bar{D} + \bar{A}B\bar{C}\bar{D} + A\bar{B}\bar{C}\bar{D} + A\bar{B}C\bar{D} \\ & + \bar{A}BC\bar{D} + ABC\bar{D} + \bar{A}\bar{B}\bar{C}D + \bar{A}\bar{B}CD \\ & + \bar{A}B\bar{C}D + \bar{A}BCD + ABCD \end{aligned}$$

Aufgabe 3 – Quine/ McCluskey

40

▶ Quine - McCluskey

Verfahren:

- 1) Alle Don't Cares werden als 1 angenommen und berücksichtigt ✓
- 2) Bilden einer disjunktiven Normalform (Sinn: aller Terme haben gleich viele Literale, landen ergo in derselben Klasse) ✓
- 3) Einteilung der Implikanten zu Klassen $Q_{i,j}$ (i : Anzahl Literale, j : Anzahl negierter Literale). Beispiel: $Q_{4,0} = abcd, abde, \dots$
- 4) Reduktion zweier benachbarter Klassen $Q_{i,j}$ und $Q_{i,j-1}$ mit Hilfe des Distributivgesetzes. (Reduktionsregel: $xy + x\bar{y} = x$)
- 5) Wird auf tieferen Ebenen (kleineres i) wiederholt, bis keine Verkürzung möglich
- 6) Alle beim Zusammenfassen unberücksichtigten Terme, die nicht nur Don't Cares überdecken, sind die gesuchten Primimplikanten

Aufgabe 3 – Quine/ McCluskey

41

Bestimmen der Klassen:

$$\text{DNF(a)} = \bar{A}\bar{B}\bar{C}\bar{D} + \bar{A}B\bar{C}\bar{D} + A\bar{B}\bar{C}\bar{D} + A\bar{B}C\bar{D} + \bar{A}BC\bar{D} + ABC\bar{D} + \bar{A}\bar{B}\bar{C}D + \bar{A}\bar{B}CD \\ + \bar{A}B\bar{C}D + \bar{A}BCD + ABCD$$

$$Q_{4,4}: \{(\bar{A}\bar{B}\bar{C}\bar{D})\}$$

$$Q_{4,3}: \{(\bar{A}B\bar{C}\bar{D}), (\bar{A}\bar{B}\bar{C}D)\}$$

$$Q_{4,2}: \{(A\bar{B}\bar{C}\bar{D}), (\bar{A}\bar{B}C\bar{D}), (\bar{A}BC\bar{D}), (A\bar{B}\bar{C}D), (\bar{A}\bar{B}\bar{C}D)\}$$

$$Q_{4,1}: \{(ABC\bar{D}), (\bar{A}BCD)\}$$

$$Q_{4,0}: \{(ABCD)\}$$

Runde Klammern nicht notwendig!

Aufgabe 3 – Quine/ McCluskey

42

▶ Quine - McCluskey

Verfahren:

- 1) Alle Don't Cares werden als 1 angenommen und berücksichtigt ✓
- 2) Bilden einer disjunktiven Normalform (Sinn: aller Terme haben gleich viele Literale, landen ergo in derselben Klasse) ✓
- 3) Einteilung der Implikanten zu Klassen $Q_{i,j}$ (i: Anzahl Literale, j: Anzahl negierter Literale). Beispiel: $Q_{4,0} = abcd, abde, \dots$ ✓
- 4) Reduktion zweier benachbarter Klassen $Q_{i,j}$ und $Q_{i,j-1}$ mit Hilfe des Distributivgesetzes. (Reduktionsregel: $xy + x\bar{y} = x$)
- 5) Wird auf tieferen Ebenen (kleineres i) wiederholt, bis keine Verkürzung möglich
- 6) Alle beim Zusammenfassen unberücksichtigten Terme, die nicht nur Don't Cares überdecken, sind die gesuchten Primimplikanten

Aufgabe 3 – Quine/ McCluskey

Reduktion mit Hilfe des Distributivgesetzes:

$$\left. \begin{array}{l} Q_{4,4}: \{(\bar{A}\bar{B}\bar{C}\bar{D})\} \\ Q_{4,3}: \{(\bar{A}\bar{B}\bar{C}\bar{D}), (\bar{A}\bar{B}\bar{C}D)\} \end{array} \right\} Q_{3,3} = \{(\bar{A}\bar{C}\bar{D}), (\bar{A}\bar{B}\bar{C})\}$$

$$\left. \begin{array}{l} Q_{4,3}: \{(\bar{A}\bar{B}\bar{C}\bar{D}), (\bar{A}\bar{B}\bar{C}D)\} \\ Q_{4,2}: \{(\bar{A}\bar{B}\bar{C}\bar{D}), (\bar{A}\bar{B}\bar{C}D), (\bar{A}\bar{B}C\bar{D}), (\bar{A}\bar{B}CD), (\bar{A}B\bar{C}\bar{D})\} \end{array} \right\} Q_{3,2} = \{(B\bar{C}\bar{D}), (\bar{A}\bar{B}\bar{D}), (\bar{A}\bar{B}\bar{C}), (\bar{B}\bar{C}D), (\bar{A}\bar{C}D)\}$$

$$\left. \begin{array}{l} Q_{4,2}: \{(\bar{A}\bar{B}\bar{C}\bar{D}), (\bar{A}\bar{B}\bar{C}D), (\bar{A}\bar{B}C\bar{D}), (\bar{A}\bar{B}CD), (\bar{A}B\bar{C}\bar{D})\} \\ Q_{4,1}: \{(\bar{A}\bar{B}\bar{C}\bar{D}), (\bar{A}\bar{B}CD)\} \end{array} \right\} Q_{3,1} = \{(A\bar{B}\bar{D}), (A\bar{C}\bar{D}), (BC\bar{D}), (\bar{A}\bar{B}C), (\bar{A}\bar{B}D)\}$$

$$\left. \begin{array}{l} Q_{4,1}: \{(\bar{A}\bar{B}\bar{C}\bar{D}), (\bar{A}\bar{B}CD)\} \\ Q_{4,0}: \{(\bar{A}\bar{B}\bar{C}\bar{D})\} \end{array} \right\} Q_{3,0} = \{(ABC), (BCD)\}$$

Aufgabe 3 – Quine/ McCluskey

44

▶ Quine - McCluskey

Verfahren:

- 1) Alle Don't Cares werden als 1 angenommen und berücksichtigt ✓
- 2) Bilden einer disjunktiven Normalform (Sinn: aller Terme haben gleich viele Literale, landen ergo in derselben Klasse) ✓
- 3) Einteilung der Implikanten zu Klassen $Q_{i,j}$ (i: Anzahl Literale, j: Anzahl negierter Literale). Beispiel: $Q_{4,0} = abcd, abde, \dots$ ✓
- 4) Reduktion zweier benachbarter Klassen $Q_{i,j}$ und $Q_{i,j-1}$ mit Hilfe des Distributivgesetzes. (Reduktionsregel: $xy + x\bar{y} = x$) ✓
- 5) Wird auf tieferen Ebenen (kleineres i) wiederholt, bis keine Verkürzung möglich
- 6) Alle beim Zusammenfassen unberücksichtigten Terme, die nicht nur Don't Cares überdecken, sind die gesuchten Primimplikanten

Aufgabe 3 – Quine/ McCluskey

Reduktion mit Hilfe des Distributivgesetzes:

$$\begin{array}{l} Q_{3,3}: \{(\bar{A}\bar{C}\bar{D}), (\bar{A}\bar{B}\bar{C})\} \\ Q_{3,2}: \{(B\bar{C}\bar{D}), (\bar{A}\bar{B}\bar{D}), (\bar{A}\bar{B}\bar{C}), (\bar{B}\bar{C}D), (\bar{A}\bar{C}D)\} \end{array} \left. \vphantom{\begin{array}{l} Q_{3,3} \\ Q_{3,2} \end{array}} \right\} Q_{2,2} = \{(\bar{A}\bar{C}), (\bar{A}\bar{C})\} = \{(\bar{A}\bar{C})\}$$
$$\begin{array}{l} Q_{3,2}: \{(B\bar{C}\bar{D}), (\bar{A}\bar{B}\bar{D}), (\bar{A}\bar{B}\bar{C}), (\bar{B}\bar{C}D), (\bar{A}\bar{C}D)\} \\ Q_{3,1}: \{(A\bar{B}\bar{D}), (A\bar{C}\bar{D}), (B\bar{C}\bar{D}), (\bar{A}\bar{B}C), (\bar{A}\bar{B}D)\} \end{array} \left. \vphantom{\begin{array}{l} Q_{3,2} \\ Q_{3,1} \end{array}} \right\} Q_{2,1} = \{(B\bar{D}), (B\bar{D}), (\bar{A}\bar{B})\} = \{(B\bar{D}), (\bar{A}\bar{B})\}$$
$$\begin{array}{l} Q_{3,1}: \{(A\bar{B}\bar{D}), (A\bar{C}\bar{D}), (B\bar{C}\bar{D}), (\bar{A}\bar{B}C), (\bar{A}\bar{B}D)\} \\ Q_{3,0}: \{(A\bar{B}C), (B\bar{C}D)\} \end{array} \left. \vphantom{\begin{array}{l} Q_{3,1} \\ Q_{3,0} \end{array}} \right\} Q_{2,0} = \{(BC), (BC)\} = \{(BC)\}$$

Wir sind fertig, da die Klassen Q_2 sich nicht weiter reduzieren lassen.

Aufgabe 3 – Quine/ McCluskey

46

▶ Quine - McCluskey

Verfahren:

- 1) Alle Don't Cares werden als 1 angenommen und berücksichtigt ✓
- 2) Bilden einer disjunktiven Normalform (Sinn: aller Terme haben gleich viele Literale, landen ergo in derselben Klasse) ✓
- 3) Einteilung der Implikanten zu Klassen $Q_{i,j}$ (i: Anzahl Literale, j: Anzahl negierter Literale). Beispiel: $Q_{4,0} = abcd, abde, \dots$ ✓
- 4) Reduktion zweier benachbarter Klassen $Q_{i,j}$ und $Q_{i,j-1}$ mit Hilfe des Distributivgesetzes. (Reduktionsregel: $xy + x\bar{y} = x$) ✓
- 5) Wird auf tieferen Ebenen (kleineres i) wiederholt, bis keine Verkürzung möglich ✓
- 6) Alle beim Zusammenfassen unberücksichtigten Terme, die nicht nur Don't Cares überdecken, sind die gesuchten Primimplikanten

Aufgabe 3 – Quine/ McCluskey

Klasse Q_4 : keine unberücksichtigten Terme

$$\left. \begin{array}{l} Q_{4,4}: \{(\bar{A}\bar{B}\bar{C}\bar{D})\} \\ Q_{4,3}: \{(\bar{A}\bar{B}\bar{C}\bar{D}), (\bar{A}\bar{B}\bar{C}D)\} \end{array} \right\} Q_{3,3} = \{(\bar{A}\bar{C}\bar{D}), (\bar{A}\bar{B}\bar{C})\}$$

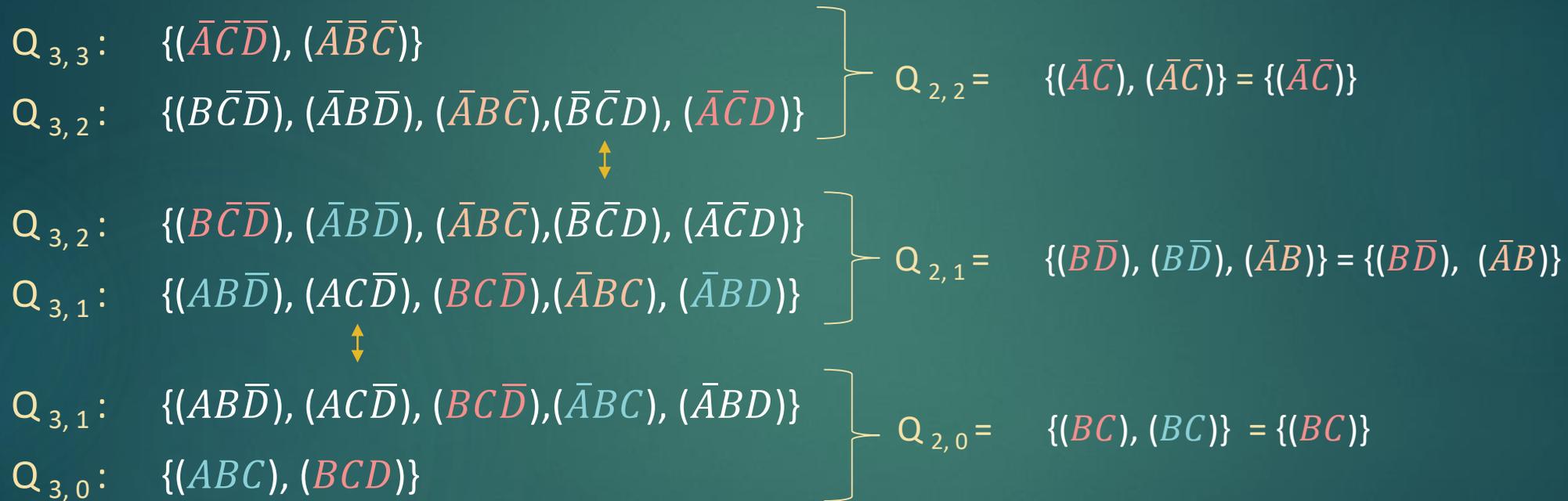
$$\left. \begin{array}{l} Q_{4,3}: \{(\bar{A}\bar{B}\bar{C}\bar{D}), (\bar{A}\bar{B}\bar{C}D)\} \\ Q_{4,2}: \{(\bar{A}\bar{B}\bar{C}\bar{D}), (\bar{A}\bar{B}\bar{C}D), (\bar{A}\bar{B}C\bar{D}), (\bar{A}\bar{B}CD), (\bar{A}B\bar{C}\bar{D})\} \end{array} \right\} Q_{3,2} = \{(\bar{B}\bar{C}\bar{D}), (\bar{A}\bar{B}\bar{D}), (\bar{A}\bar{B}\bar{C}), (\bar{B}\bar{C}D), (\bar{A}\bar{C}D)\}$$

$$\left. \begin{array}{l} Q_{4,2}: \{(\bar{A}\bar{B}\bar{C}\bar{D}), (\bar{A}\bar{B}\bar{C}D), (\bar{A}\bar{B}C\bar{D}), (\bar{A}\bar{B}CD), (\bar{A}B\bar{C}\bar{D})\} \\ Q_{4,1}: \{(\bar{A}\bar{B}\bar{C}\bar{D}), (\bar{A}\bar{B}CD)\} \end{array} \right\} Q_{3,1} = \{(\bar{A}\bar{B}\bar{D}), (\bar{A}\bar{C}\bar{D}), (\bar{B}\bar{C}\bar{D}), (\bar{A}\bar{B}C), (\bar{A}\bar{B}D)\}$$

$$\left. \begin{array}{l} Q_{4,1}: \{(\bar{A}\bar{B}\bar{C}\bar{D}), (\bar{A}\bar{B}CD)\} \\ Q_{4,0}: \{(\bar{A}\bar{B}CD)\} \end{array} \right\} Q_{3,0} = \{(\bar{A}\bar{B}C), (\bar{B}CD)\}$$

Aufgabe 3 – Quine/ McCluskey

Klasse Q_3 :



Es gibt zwei Primimplikanten der Klasse Q_3 und vier der Klasse Q_2 (nämlich alle!).

Primimplikanten: $\bar{B}\bar{C}\bar{D}, A\bar{C}\bar{D}, \bar{A}\bar{C}, B\bar{D}, \bar{A}\bar{B}, BC$

Aufgabe 3 – Quine/ McCluskey

► Alternative Quine/ McClusky-Darstellung

$Q_{4,4}:$ $\{(\bar{A}\bar{B}\bar{C}\bar{D})\}$
 $Q_{4,3}:$ $\{(\bar{A}\bar{B}\bar{C}D), (\bar{A}\bar{B}C\bar{D})\}$
 $Q_{4,2}:$ $\{(A\bar{B}\bar{C}\bar{D}), (A\bar{B}C\bar{D}), (\bar{A}BC\bar{D}), (A\bar{B}C\bar{D}), (\bar{A}B\bar{C}D)\}$
 $Q_{4,1}:$ $\{(ABC\bar{D}), (\bar{A}BCD)\}$
 $Q_{4,0}:$ $\{(ABCD)\}$



$Q_{4,4}:$ $\{0000\}$
 $Q_{4,3}:$ $\{0100, 0001\}$
 $Q_{4,2}:$ $\{1100, 1010, 0110, 1001, 0101\}$
 $Q_{4,1}:$ $\{1110, 0111\}$
 $Q_{4,0}:$ $\{1111\}$



Hex	D C B A	a
0	0 0 0 0	1
1	0 0 0 1	0
2	0 0 1 0	1
3	0 0 1 1	1
4	0 1 0 0	0
5	0 1 0 1	1
6	0 1 1 0	1
7	0 1 1 1	1
8	1 0 0 0	1
9	1 0 0 1	1
A	1 0 1 0	1
B	1 0 1 1	0
C	1 1 0 0	0
D	1 1 0 1	0
E	1 1 1 0	1
F	1 1 1 1	1

Aufgabe 3 – Quine/ McCluskey

50

► Alternative Quine/ McClusky-Darstellung

$Q_{4,4}$: {0000}
 $Q_{4,3}$: {0100, 0001}
 $Q_{4,2}$: {1100, 1010, 0110, 1001, 0101}
 $Q_{4,1}$: {1110, 0111}
 $Q_{4,0}$: {1111}



$Q_{3,3}$: {0-00, 000-}
 $Q_{3,2}$: {-100, 01-0, 010-, -001, 0-01}
 $Q_{3,1}$: {11-0, 1-10, -110, 011-, 01-1}
 $Q_{3,0}$: {111-, -111}



$Q_{2,2}$: {0-0-, 0--0}
 $Q_{2,1}$: {-1-0, 01--}
 $Q_{2,0}$: {-11-}

Aufgabe 3 – Quine/ McCluskey

Lösen per Überdeckungstabellen:

Primimplikanten: $\bar{B}\bar{C}D$, $AC\bar{D}$, $\bar{A}\bar{C}$, $B\bar{D}$, $\bar{A}B$, BC

	0	2	3	5	6	7	8	9	A	E	F
$\bar{B}\bar{C}D$				1		1					
$AC\bar{D}$							1	1			
$\bar{A}\bar{C}$	1	1					1		1		
$B\bar{D}$		1	1		1	1					
$\bar{A}B$		1			1				1	1	
BC					1	1				1	1

Aufgabe 3 – Quine/ McCluskey

Lösen per Überdeckungstabellen:

Anwenden der Kernimplikantenregel:

	0	2	3	5	6	7	8	9	A	E	F
$\bar{B}\bar{C}D$				1		1					
$AC\bar{D}$							1	1			
$\bar{A}\bar{C}$	1	1					1		1		
$B\bar{D}$		1	1		1	1					
$\bar{A}B$		1			1				1	1	
BC					1	1				1	1

Aufgabe 3 – Quine/ McCluskey

53

Lösen per Überdeckungstabellen:

Anwenden der Kernimplikantenregel:

	0	2	3	5	6	7	8	9	A	E	F
$\bar{B}\bar{C}\bar{D}$				1		1					
$AC\bar{D}$							1	1			
$\bar{A}\bar{C}$	1	1					1		1		
$B\bar{D}$		1	1		1	1					
$\bar{A}B$		1							1	1	
BC						1	1			1	1

Alle Einstellen werden überdeckt (vertikal geschnitten). Wir benötigen dazu alle Primimplikanten mit Ausnahme des Termes $\bar{A}B$. Die restlichen Terme bilden unsere DMF

Aufgabe 4 - Relation

54

- ▶ In der Vorweihnachtszeit stellt sich die Frage, was besser ist: ewiges Glück oder ein Lebkuchenherz. Man sollte meinen:
- ▶ Nichts ist besser als ewiges Glück
- ▶ Ein Lebkuchenherz ist besser als nichts
- ▶ „Besser“ ist bekanntlich eine transitive Relation. Was folgt daraus?

Hinweis: an dieser Stelle ist ein gekünsteltes Lachen angebracht

Aufgabe 4 - Relation

55

- ▶ Begriffsklärung: Was ist Glück?

- Aristoteles:** Glück als intrinsisches Endziel (später v.a. Epikur);
Glück = polymorph (d.h. viele Güter (Freunde, Familie, ...) führen gemeinsam zum Ziel)
Berühmter Syllogismus:
Glück liegt in der Eigenschaft, die uns von allen anderen unterscheidet (Tüchtigkeit der Seele (Cicero: ratio))
- Camus:** Teleologisches Glücksmodell veraltet, deshalb Einführung eines deontologischen Glücksmodells (vgl. Sysyphos)
- Nietzsche:** Glück wird indirekt erzielt (also nicht direkt angestrebt). Keine Schmerzvermeidung suchen, sondern höchste Intensität

Aufgabe 4 - Relation

56

- ▶ Nichts ist besser als ewiges Glück
- ▶ Ein Lebkuchenherz ist besser als nichts

Transitivität: $x * y \wedge y * z \rightarrow x * z$
 $x \text{ besser } y \wedge y \text{ besser } z \rightarrow x \text{ besser } z$

$\text{Lebkuchenherz besser Nichts} \wedge \text{Nichts besser Glück}$
 $\rightarrow \text{Lebkuchenherz besser Glück}$

Vielen Dank für eure angenehme Aufmerksamkeit!

57

- ▶ Diesmal eine Zitat des Homer



Vielen Dank für eure angenehme Aufmerksamkeit!

- ▶ Diesmal eine Zitat des Homer

"βέλτερον ὄς φεύγων προφύγη κακὸν ἢ ἔ ἀλώη·"