

GTI – ÜBUNG 7

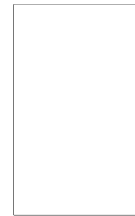
SYMMETRIEDIAGRAMME

Aufgabe 1 – Symmetriediagramme

Beschreibung

- ▶ Gegeben seien die vier in der Funktionstabelle abgebildeten Schaltfunktionen, jeweils abhängig vom Eingangsvektor $X = \{D, C, B, A\}$. Bestimmen Sie alle Primterme jeder Funktion mit Hilfe von Symmetriediagrammen und geben Sie jeweils eine DMF sowie eine KMF an.

Aufgabe 1 – Symmetriediagramme



Hex	Oktal	D C B A	$y_1(x)$	$y_2(X)$	$y_3(X)$	$y_4(X)$
0	00	0 0 0 0	1	-	1	1
1	01	0 0 0 1	0	-	0	-
2	02	0 0 1 0	0	0	0	-
3	03	0 0 1 1	1	1	1	1
4	04	0 1 0 0	1	-	0	0
5	05	0 1 0 1	1	-	1	1
6	06	0 1 1 0	1	1	1	1
7	07	0 1 1 1	1	0	1	1
8	10	1 0 0 0	0	-	0	0
9	11	1 0 0 1	0	-	0	0
A	12	1 0 1 0	0	1	0	-
B	13	1 0 1 1	0	0	0	0
C	14	1 1 0 0	0	-	1	1
D	15	1 1 0 1	0	-	1	1
E	16	1 1 1 0	0	0	1	1
F	17	1 1 1 1	0	1	0	-

Aufgabe 1 – Symmetriediagramme

Erinnerung:

Disjunktive Form (DF):

Disjunktion (= Veroderung) mehrerer Terme aus Konjunktionen

$$\text{Beispiel: } f_1(a, b, c) = a \cdot b + a \cdot b \cdot \bar{c} + \bar{b}$$

Disjunktive Normalform (DNF):

Disjunktion aller Minterme (d.h. Konjunktionen aller Literale der Funktion)

$$\text{Beispiel: } f_1(a, b, c) = abc + ab\bar{c} + a\bar{b}c + \bar{a}\bar{b}c + a\bar{b}\bar{c} + \bar{a}\bar{b}\bar{c}$$

Disjunktive Minimalform (DMF):

Disjunktion mehrerer durch Konjunktion verknüpften Literale, die (ohne ihre Form zu verletzen) nicht weiter vereinfacht werden kann

$$\text{Beispiel: } f_1(a, b, c) = a \cdot b + \bar{b}$$

Aufgabe 1 – Symmetriediagramme

Erinnerung:

Konjunktive Form (KF):

Konjunktion (= Veroderung) mehrerer Terme aus Disjunktionen

$$\text{Beispiel: } f_1(a, b, c) = (a + b) \cdot (a + b + \bar{c}) \cdot \bar{b}$$

Konjunktive Normalform (KNF):

Konjunktion aller Maxterme (d.h. Disjunktionen aller Literale der Funktion)

$$\text{Beispiel: } f_1(a, b, c) = (a + b + c) \cdot (a + b + \bar{c}) \cdot (a + \bar{b} + c) \cdot (\bar{a} + \bar{b} + c) \\ \cdot (a + \bar{b} + \bar{c}) \cdot (\bar{a} + \bar{b} + \bar{c})$$

Konjunktive Minimalform (KMF):

Konjunktion mehrerer durch Disjunktion verknüpften Literale, die (ohne ihre Form zu verletzen) nicht weiter vereinfacht werden kann

$$\text{Beispiel: } f_1(a, b, c) = (a + b) \cdot \bar{b}$$

Aufgabe 1 – Symmetriediagramme

Begriffsklärung:

Primterm:

- Minimale Terme einer DMF bzw. KMF
- D.h. maximale Einsenüberdeckung bzw. Nullenüberdeckung im SD

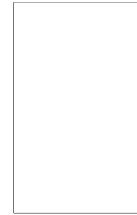
Primimplikant:

- Primterm einer DMF
- Also: maximale Einsen- bzw. Don't Care - Überdeckung im SD

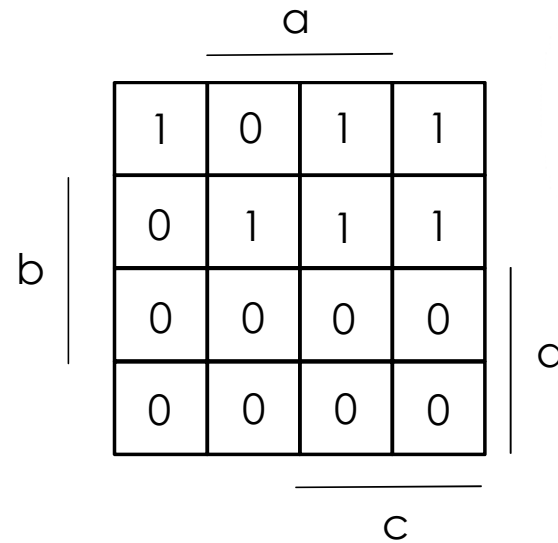
Primimplikat:

- Primterm einer KMF
- Also: maximale Nullen- bzw. Don't Care - Überdeckung im SD

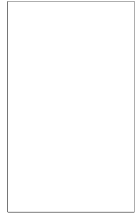
Aufgabe 1 – Symmetriediagramme



Hex	Oktal	D C B A	$y_1(x)$
0	00	0 0 0 0	1
1	01	0 0 0 1	0
2	02	0 0 1 0	0
3	03	0 0 1 1	1
4	04	0 1 0 0	1
5	05	0 1 0 1	1
6	06	0 1 1 0	1
7	07	0 1 1 1	1
8	10	1 0 0 0	0
9	11	1 0 0 1	0
A	12	1 0 1 0	0
B	13	1 0 1 1	0
C	14	1 1 0 0	0
D	15	1 1 0 1	0
E	16	1 1 1 0	0
F	17	1 1 1 1	0



Aufgabe 1 – Symmetriediagramme



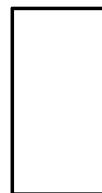
- Bestimmen der Primterme (maximale Einsenüberdeckungen)

Überdeckungen dürfen nur 1 oder – enthalten, aber keine Nullen. Zudem sind nur durch Symmetriespiegelung entstandene Formen erlaubt:

Einsenerüberdeckung:

Zweierüberdeckung:

Viererüberdeckung:



Achterüberdeckung, ...

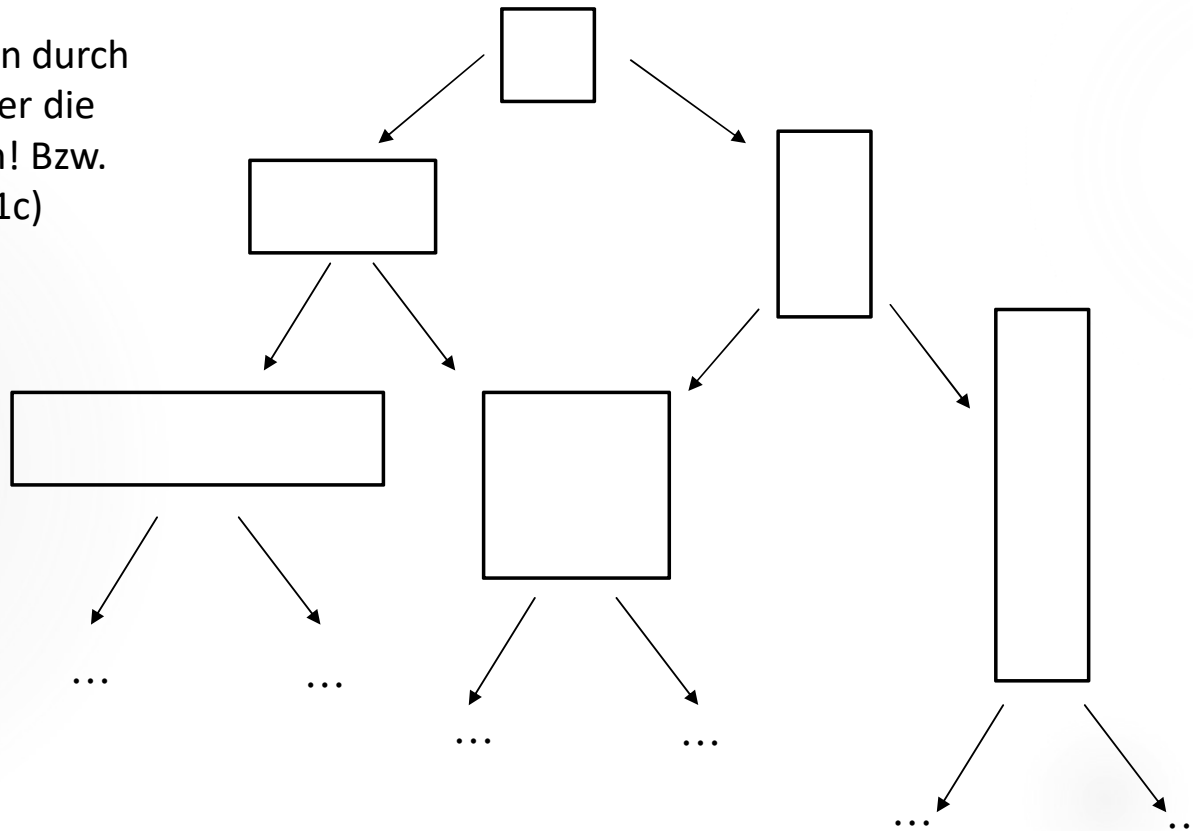
	a				
	1	0	1	1	
b	0	1	1	1	
	0	0	0	0	
	0	0	0	0	d
	c				

Aufgabe 1 – Symmetriediagramme

- Spiegelung außerhalb des Symmetriediagramms

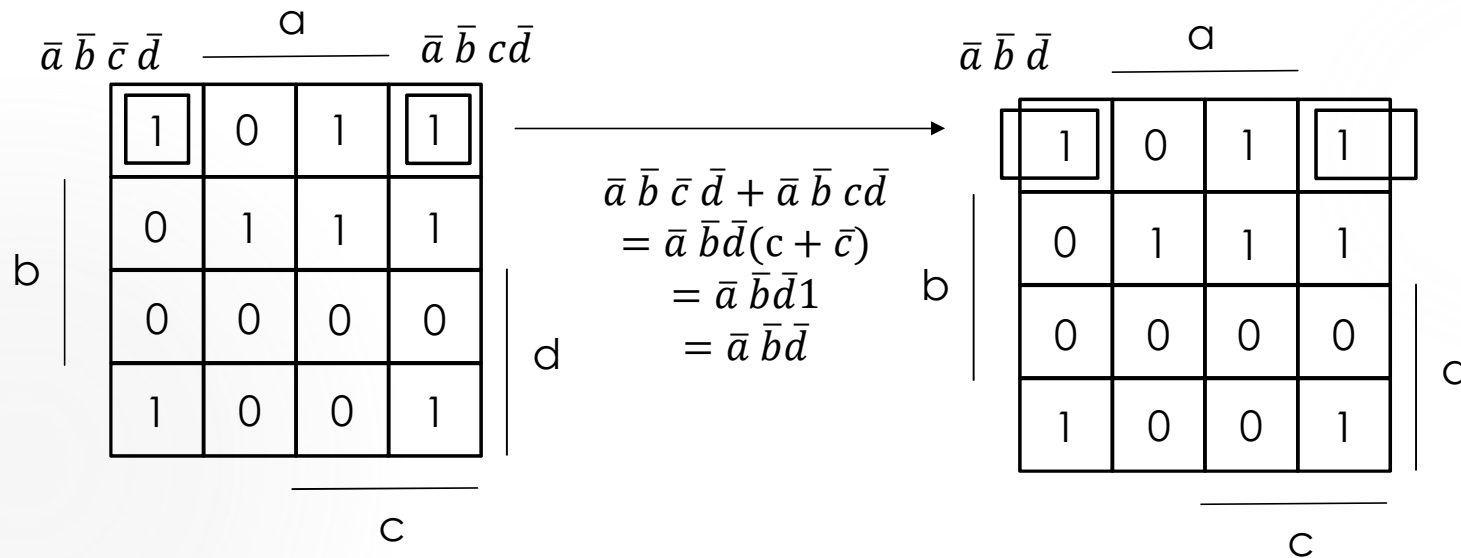
Achtung:

Diese Formen können durch Spiegelung im SD über die Kanten hinaus gehen! Bzw. zerteilt werden (s. A1c)



Aufgabe 1 – Symmetriediagramme

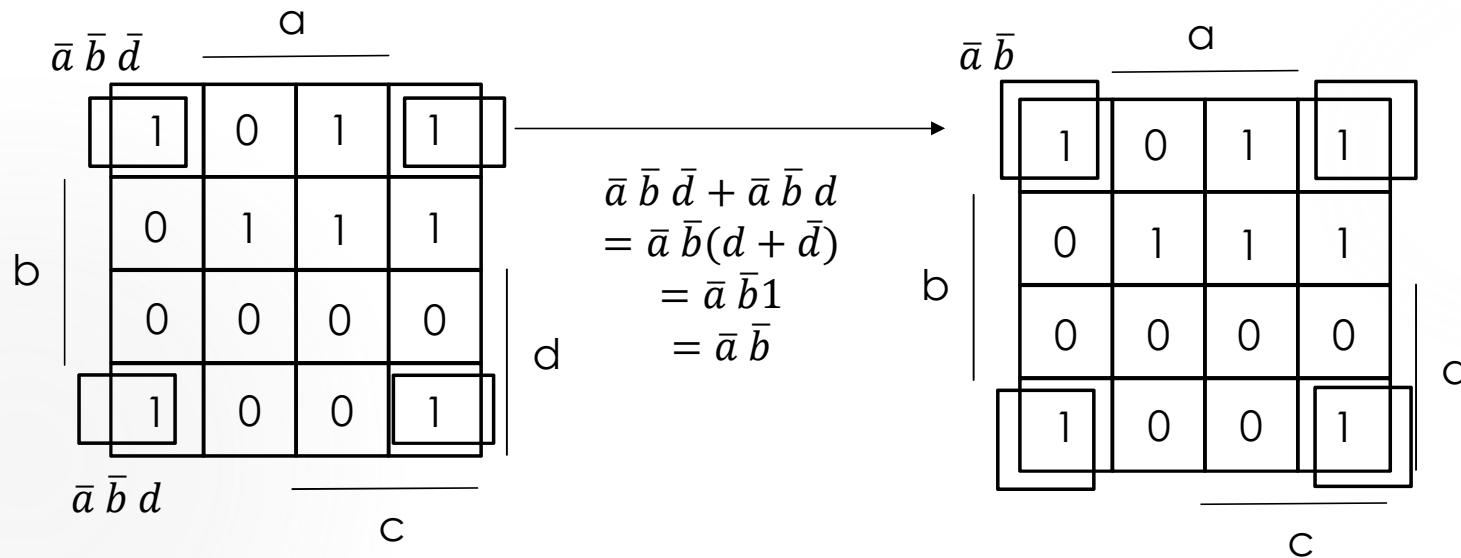
- Symmetriespiegelung im Symmetriediagramm



Man spiegelt, so dass sich nur die Überdeckung eines Literals ändert!
 Im obigen Beispiel bleiben a, b und d unverändert und nur c ändert sich

Aufgabe 1 – Symmetriediagramme

- Symmetriespiegelung im Symmetriediagramm

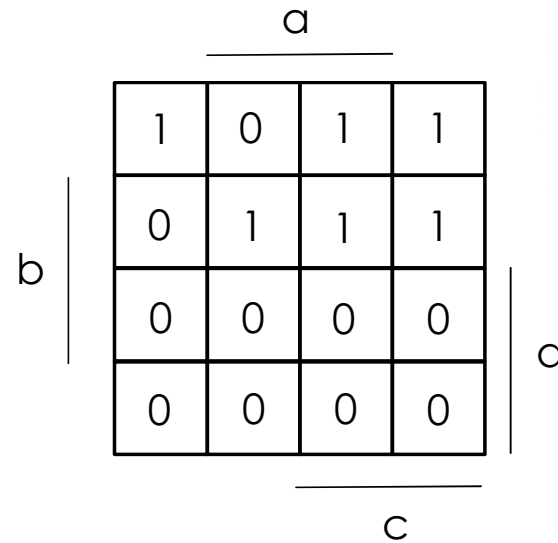


Wir minimieren also durch Reduktion mehrerer längerer Terme auf einen kürzeren Term, der immer noch alle Stellen der Ursprungsterme überdeckt!

Aufgabe 1 – Symmetriediagramme



Hex	Oktal	D C B A	$y_1(x)$
0	00	0 0 0 0	1
1	01	0 0 0 1	0
2	02	0 0 1 0	0
3	03	0 0 1 1	1
4	04	0 1 0 0	1
5	05	0 1 0 1	1
6	06	0 1 1 0	1
7	07	0 1 1 1	1
8	10	1 0 0 0	0
9	11	1 0 0 1	0
A	12	1 0 1 0	0
B	13	1 0 1 1	0
C	14	1 1 0 0	0
D	15	1 1 0 1	0
E	16	1 1 1 0	0
F	17	1 1 1 1	0



Aufgabe 1 – Symmetriediagramme

- ▶ Bestimmen der Primterme (maximale Einsenüberdeckungen)

Wir finden geometrisch alle maximalen Einsenüberdeckungen (d.h. Primterme):

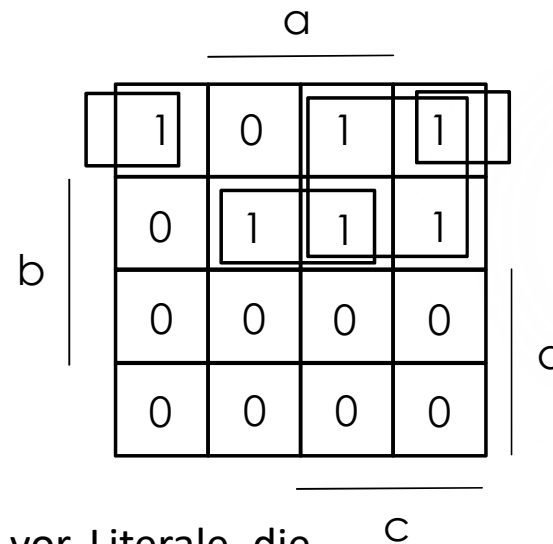
Auch über die Ecken hinaus möglich!

Auslesen von Primtermen:

Alle Literale, welche die Überdeckung vollständig oder überhaupt nicht enthalten, kommen im Term vor. Literale, die den Block nur partiell überdecken werden gestrichen (diese kommen negiert, sowie nicht negiert vor und annihilieren sich so gegenseitig)!

Beispiel: Der rote Block wird von c vollständig und von d überhaupt nicht überdeckt

➤ $c\bar{d}$



Aufgabe 1 – Symmetriediagramme

- Bestimmen der Primterme (maximale Einsenüberdeckungen)

Wir finden geometrisch alle maximalen Einsenüberdeckungen (d.h. Primterme):

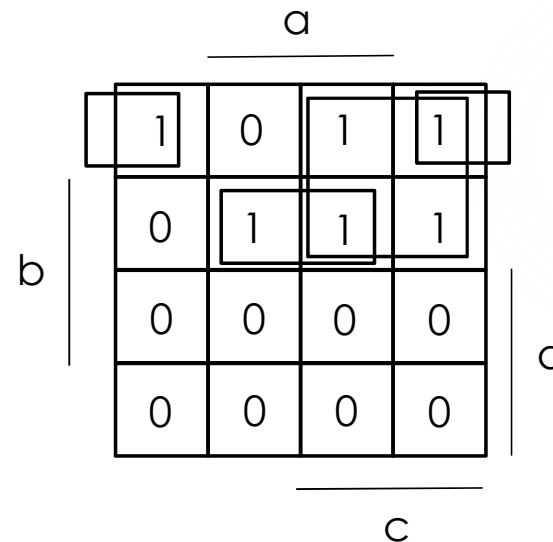
Auch über die Ecken hinaus möglich!

Primterme (Primimplikanten):

1er Überdeckungen: /

2er Überdeckungen: $ab\bar{d}, \bar{a}\bar{b}\bar{d}$

4er Überdeckungen: $c\bar{d}$



Aufgabe 1 – Symmetriediagramme

- Bestimmen der DMF

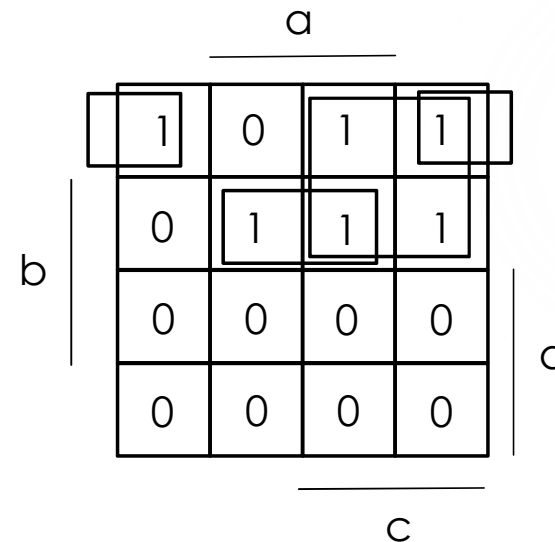
Primimplikanten:

1er Überdeckungen: /

2er Überdeckungen: $ab\bar{d}, \bar{a}\bar{b}\bar{d}$

4er Überdeckungen: $c\bar{d}$

DMF: $ab\bar{d} + \bar{a}\bar{b}\bar{d} + c\bar{d}$



Aufgabe 1 – Symmetriediagramme

- Bestimmen der KMF

Primimplikate:

1er Überdeckungen: /

2er Überdeckungen: $\bar{a} + b + c, a + \bar{b} + c$

4er Überdeckungen: /

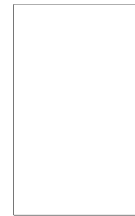
8er Überdeckungen: \bar{d}

KMF: $(\bar{a} + b + c) \cdot (a + \bar{b} + c) \cdot \bar{d}$

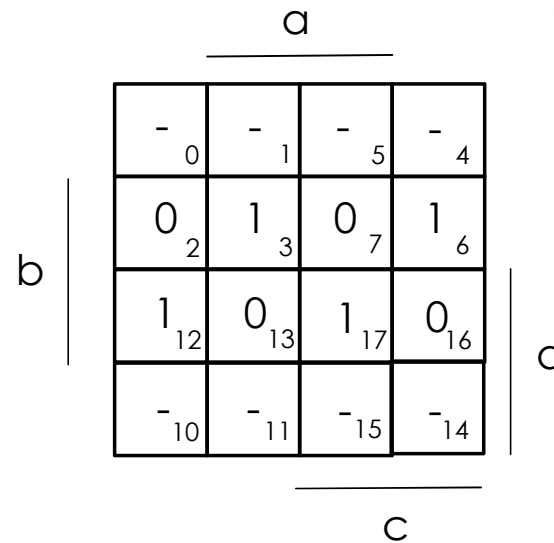
NEGIERT AUSLESEN!!!

	a				
	1	0	1	1	
b	0	1	1	1	d
	0	0	0	0	
	0	0	0	0	
	0	0	0	0	
	c				

Aufgabe 1 – Symmetriediagramme



Hex	Oktal	D C B A	$y_2(X)$
0	00	0 0 0 0	-
1	01	0 0 0 1	-
2	02	0 0 1 0	0
3	03	0 0 1 1	1
4	04	0 1 0 0	-
5	05	0 1 0 1	-
6	06	0 1 1 0	1
7	07	0 1 1 1	0
8	10	1 0 0 0	-
9	11	1 0 0 1	-
A	12	1 0 1 0	1
B	13	1 0 1 1	0
C	14	1 1 0 0	-
D	15	1 1 0 1	-
E	16	1 1 1 0	0
F	17	1 1 1 1	1



Aufgabe 1 – Symmetriediagramme

- Bestimmen der Primterme (maximale Einsenüberdeckungen)

Wir finden geometrisch alle maximalen Einsenüberdeckungen (d.h. Primterme):

Primterme (Primimplikanten):

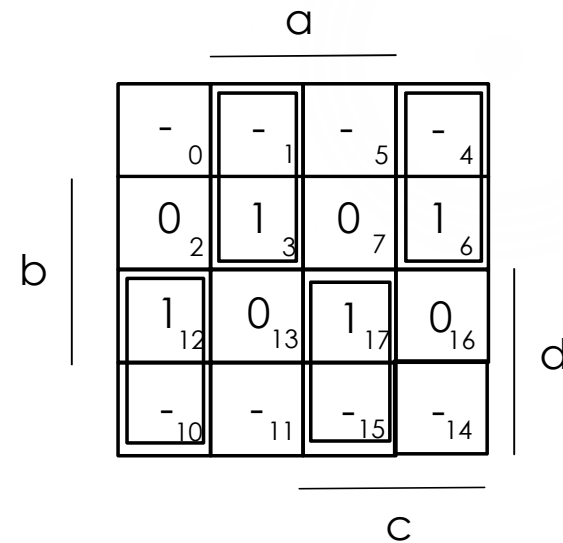
1er Überdeckungen: /

2er Überdeckungen: $\bar{a}\bar{c}d, a\bar{c}\bar{d}, acd, \bar{a}c\bar{d}$

4er Überdeckungen: /

8er Überdeckungen: \bar{b}

\bar{b} ist dabei eine reine Don't Care – Überdeckung!



Aufgabe 1 – Symmetriediagramme

- Bestimmen der DNF und DMF

Primterme:

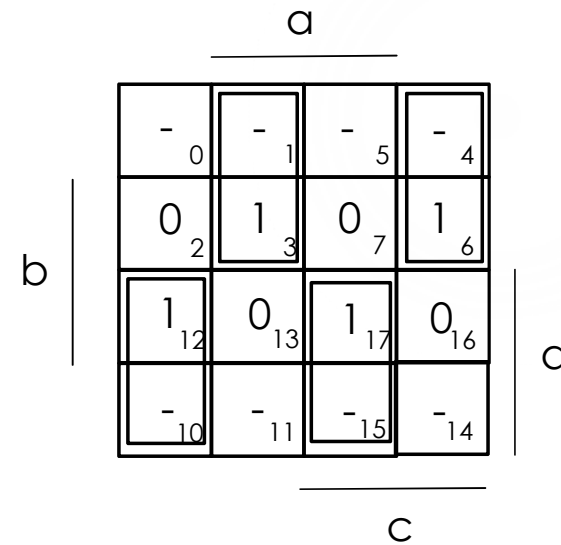
$$\bar{a}\bar{c}d, a\bar{c}\bar{d}, acd, \bar{a}c\bar{d}, (\bar{b})$$

DMF:

Wir müssen alle Primterme nehmen, da diese Kerne sind
 $\bar{a}\bar{c}d + a\bar{c}\bar{d} + acd + \bar{a}c\bar{d}$

DNF:

Wir erweitern alle Primterme mit der Fallunterscheidung (Don't cares streichen)
 $\bar{a}b\bar{c}d + ab\bar{c}\bar{d} + abcd + \bar{a}b\bar{c}\bar{d} + \bar{a}\bar{b}\bar{c}d + \bar{a}\bar{b}\bar{c}\bar{d} + \bar{a}\bar{b}cd + \bar{a}b\bar{c}\bar{d}$



Aufgabe 1 – Symmetriediagramme

- Bestimmen der KMF

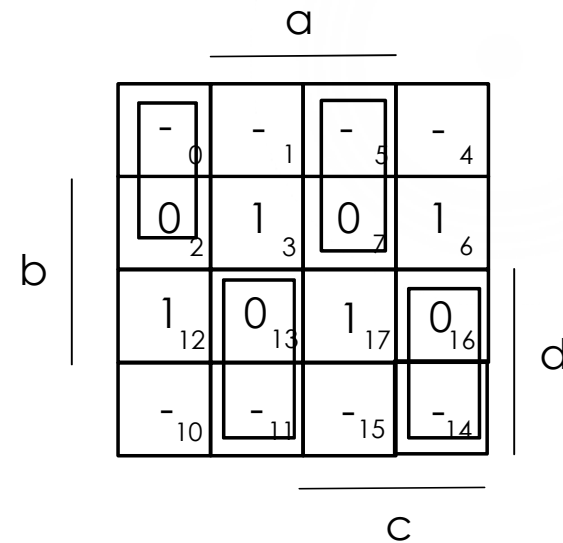
Primimplikate:

1er Überdeckungen: /

2er Überdeckungen: $\bar{a} + \bar{c} + d, a + \bar{c} + \bar{d},$
 $a + c + d, \bar{a} + c + \bar{d}$

KMF:

$$(\bar{a} + \bar{c} + d) \cdot (a + \bar{c} + \bar{d}) \cdot (a + c + d) \cdot (\bar{a} + c + \bar{d})$$



Aufgabe 1 – Symmetriediagramme

Begriffsklärung:

Kernimplikant:

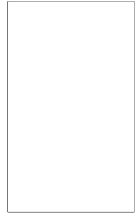
- Primterm einer DMF, der in der DMF enthalten sein muss
- Überdeckt also eine Einstelle, die kein anderer Primimplikant überdeckt

Kernimplikat:

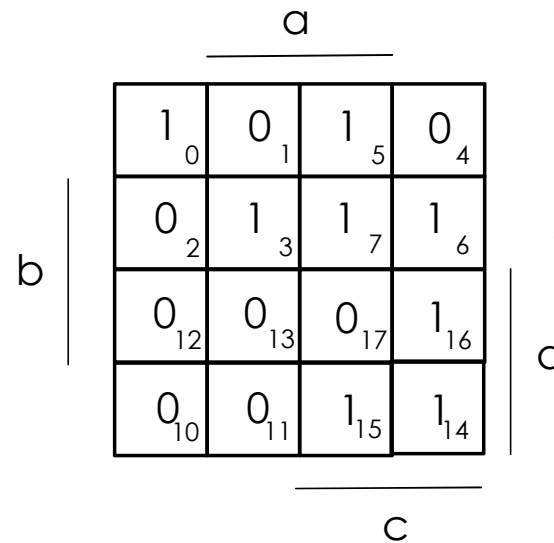
- Primterm einer KMF, der in der KMF enthalten sein muss
- Überdeckt also eine Nullstelle, die kein anderer Primimplikat überdeckt

Durch die Überdeckung der Einstellen und Nullstellen können alle Primterme gefunden werden. Die DMF/KMF setzt sich aus einer kostenminimalen Auswahl dieser Terme zusammen!

Aufgabe 1 – Symmetriediagramme



Hex	Oktal	D C B A	$y_3(X)$
0	00	0 0 0 0	1
1	01	0 0 0 1	0
2	02	0 0 1 0	0
3	03	0 0 1 1	1
4	04	0 1 0 0	0
5	05	0 1 0 1	1
6	06	0 1 1 0	1
7	07	0 1 1 1	1
8	10	1 0 0 0	0
9	11	1 0 0 1	0
A	12	1 0 1 0	0
B	13	1 0 1 1	0
C	14	1 1 0 0	1
D	15	1 1 0 1	1
E	16	1 1 1 0	1
F	17	1 1 1 1	0



Aufgabe 1 – Symmetriediagramme

- Bestimmen der Primterme (maximale Einsenüberdeckungen)

Wir finden geometrisch alle maximalen Einsenüberdeckungen (d.h. Primterme):

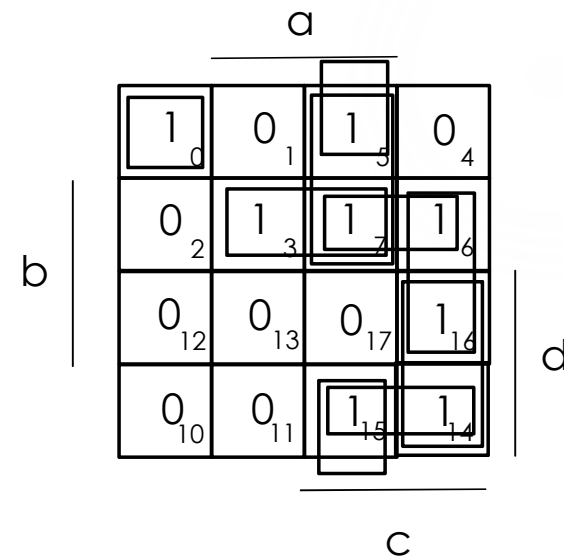
Primterme (Primimplikanten:

1er Überdeckungen: $\bar{a}\bar{b}\bar{c}\bar{d}$

2er Überdeckungen: $ab\bar{d}, ac\bar{d}, a\bar{b}c, bc\bar{d}$

$\bar{a}bc, \bar{a}cd, \bar{b}cd$

4er Überdeckungen: /



Aufgabe 1 – Symmetriediagramme

- Bestimmen der DNF und DMF

Primterme:

$$\bar{a}\bar{b}\bar{c}\bar{d}, ab\bar{d}, ac\bar{d}, \bar{a}bc, bc\bar{d}, \bar{a}bc, \bar{a}cd, \bar{b}cd$$

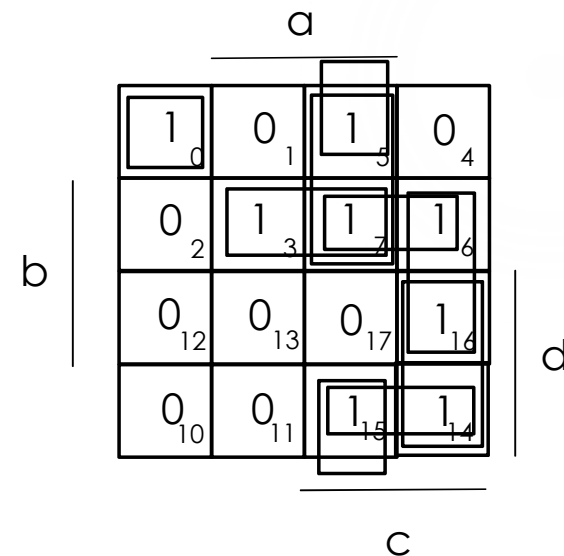
Hier gibt es mehrere Möglichkeiten der Bildung, da manche Primterme redundant sind (Methodik später!)

DMF:

$$\bar{a}\bar{b}\bar{c}\bar{d} + ab\bar{d} + \bar{a}bc + \bar{a}bc + \bar{b}cd$$

DNF (Idempotenz):

$$\bar{a}\bar{b}\bar{c}\bar{d} + abc\bar{d} + \bar{a}bcd + \bar{a}bcd + ab\bar{c}\bar{d} + \bar{a}bc\bar{d} + \bar{a}bc\bar{d} + \bar{a}bc\bar{d}$$



Aufgabe 1 – Symmetriediagramme

- Bestimmen der KMF

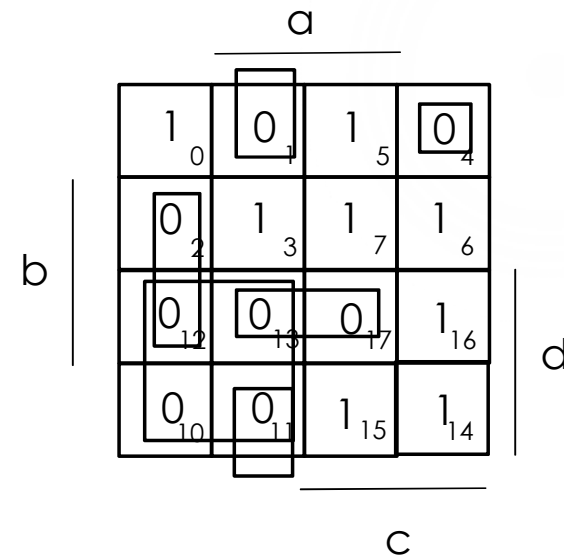
Primterme (Primimplikanten:

1er Überdeckungen: $a + b + \bar{c} + d$

2er Überdeckungen: $\bar{a} + \bar{b} + \bar{d}, a + \bar{b} + c,$

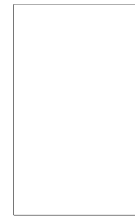
$\bar{a} + b + c$

4er Überdeckungen: $c + \bar{d}$

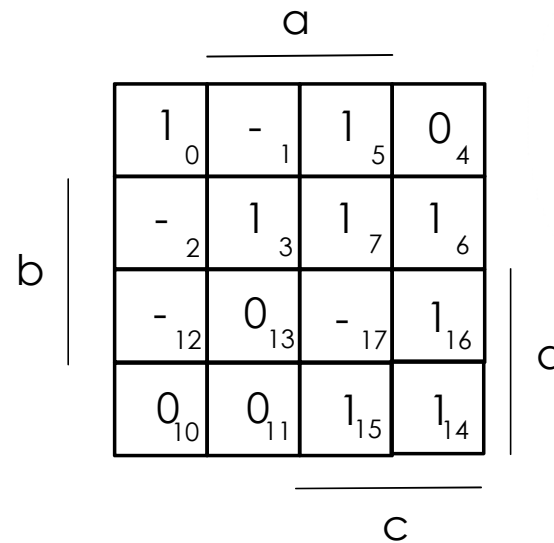


KMF: $(a + b + \bar{c} + d)(\bar{a} + \bar{b} + \bar{d})(a + \bar{b} + c)(\bar{a} + b + c)(c + \bar{d})$

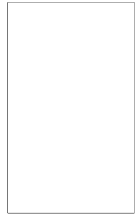
Aufgabe 1 – Symmetriediagramme



Hex	Oktal	D C B A	$y_4(X)$
0	00	0 0 0 0	1
1	01	0 0 0 1	-
2	02	0 0 1 0	-
3	03	0 0 1 1	1
4	04	0 1 0 0	0
5	05	0 1 0 1	1
6	06	0 1 1 0	1
7	07	0 1 1 1	1
8	10	1 0 0 0	0
9	11	1 0 0 1	0
A	12	1 0 1 0	-
B	13	1 0 1 1	0
C	14	1 1 0 0	1
D	15	1 1 0 1	1
E	16	1 1 1 0	1
F	17	1 1 1 1	-



Aufgabe 1 – Symmetriediagramme



- ▶ Bestimmen der Primterme (maximale Einsenüberdeckungen)

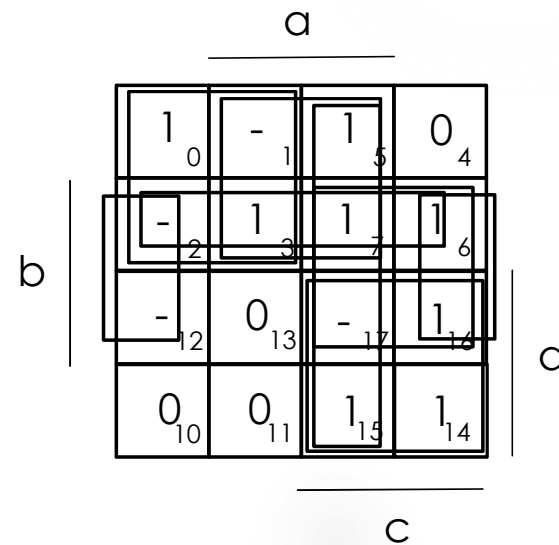
Wir finden geometrisch alle maximalen Einsenüberdeckungen (d.h. Primterme):

Primterme:

1er Überdeckungen: /

2er Überdeckungen: /

4er Überdeckungen: $\bar{c}\bar{d}, a\bar{d}, bc, cd, b\bar{d}, ac, b\bar{a}$



Aufgabe 1 – Symmetriediagramme

- Bestimmen der Primterme (maximale Einsenüberdeckungen)

Auswahl an Primtermen: $\bar{c}\bar{d}, a\bar{d}, bc, cd, b\bar{d}, ac, b\bar{a}$

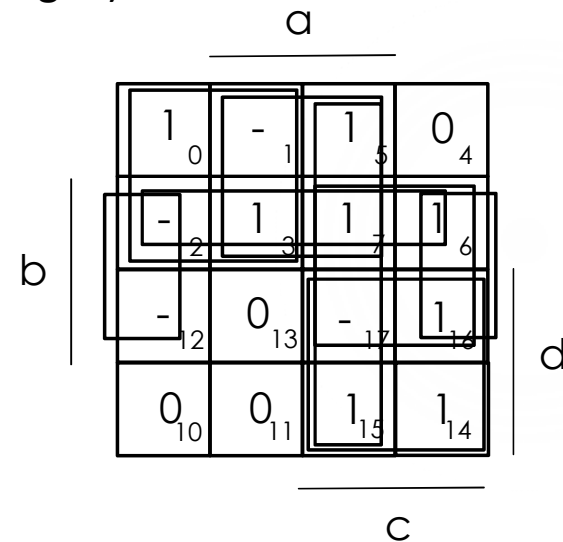
DMF:

$$\bar{c}\bar{d} + a\bar{d} + bc + cd$$

Statt dem Erweitern und Streichen kann man auch jeden jeden Eins-Term noch einmal selbstständig aufstellen:

DNF:

$$\bar{a}\bar{b}\bar{c}\bar{d} + ab\bar{c}\bar{d} + a\bar{b}c\bar{d} + \bar{a}bc\bar{d} + abc\bar{d} + \bar{a}\bar{b}cd + a\bar{b}cd + \bar{a}bcd$$



Aufgabe 1 – Symmetriediagramme

► Bestimmen der KMF:

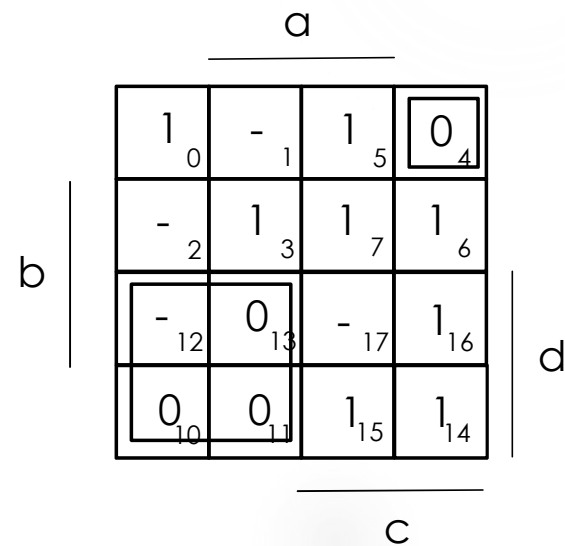
Primterme:

1er Überdeckungen: $a + b + \bar{c} + d$

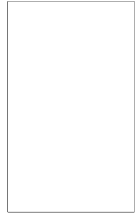
2er Überdeckungen: /

4er Überdeckungen: $c + \bar{d}$

KMF: $(a + b + \bar{c} + d)(c + \bar{d})$



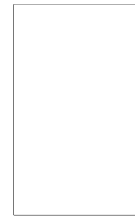
Aufgabe 1 – Symmetriediagramme



Beschreibung

- ▶ Bestimmen Sie mithilfe des unten gegebenen Symmetriediagramms alle Primimplikate der darin spezifizierten Schaltfunktion $f_5(x_4, x_3, x_2, x_1, x_0)$ und geben Sie deren schaltalgebraische Ausdrücke an. Kennzeichnen Sie durch Unterstreichen alle Kernimplikate.

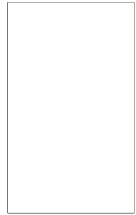
Aufgabe 1 – Symmetriediagramme



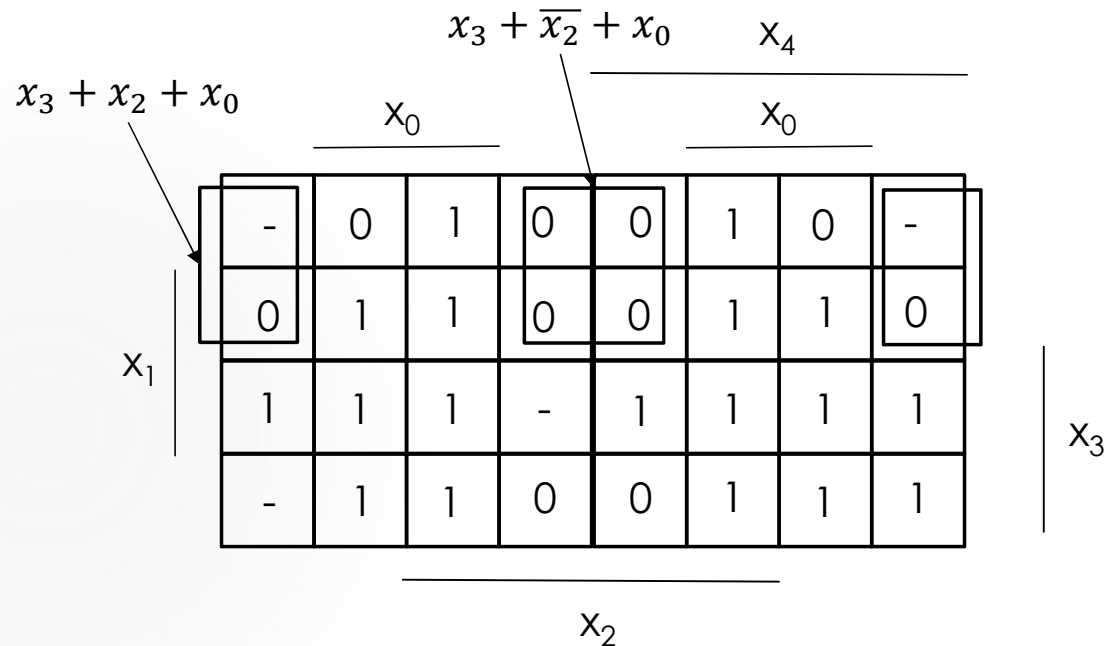
- ▶ Alle Primimplikate + deren schaltalgebraische Ausdrücke.
Kennzeichnen Sie durch Unterstreichen alle Kernimplikate.

		<u>x_0</u>			<u>x_0</u>		<u>x_4</u>		
x_1		-	0	1	0	0	1	0	-
		0	1	1	0	0	1	1	0
		1	1	1	-	1	1	1	1
		-	1	1	0	0	1	1	1
		<u>x_2</u>							
									x_3

Aufgabe 1 – Symmetriediagramme

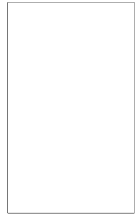


Tip: alle maximalen Überdeckungen raussuchen und danach durch Vergleich der entstehenden Terme untersuchen, ob diese noch weiter reduziert werden können!

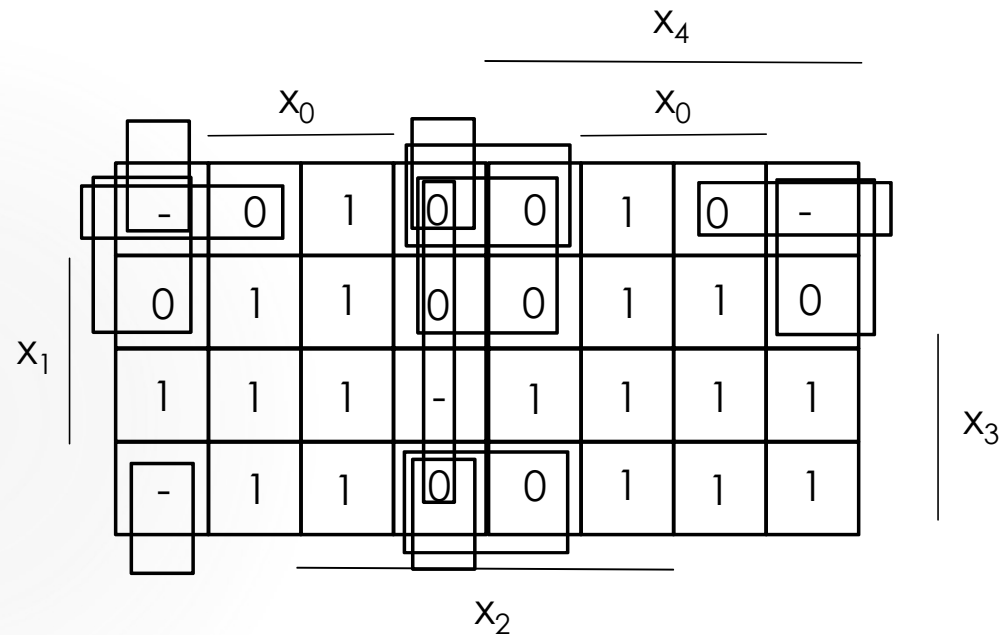


$x_3 + x_2 + x_0$ und $x_3 + \bar{x}_2 + x_0 \rightarrow x_3 + x_0$
 Nicht maximal! Beide Terme können verschmolzen werden.

Aufgabe 1 – Symmetriediagramme



- ▶ Alle Primimplikate + deren schaltalgebraische Ausdrücke.
Kennzeichnen Sie durch Unterstreichen alle Kernimplikate.

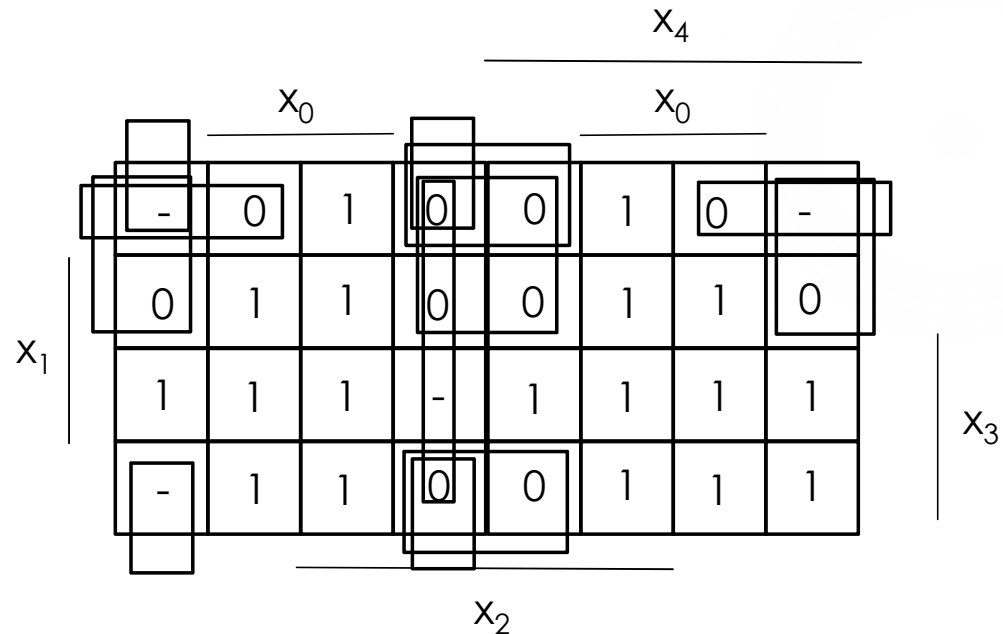


Aufgabe 1 – Symmetriediagramme

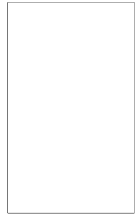
- ▶ Alle Primimplikate + deren schaltalgebraische Ausdrücke.
Kennzeichnen Sie durch Unterstreichen alle Kernimplikate.

ACHTUNG:

Primterme überstrecken mehrere
Unabhängige Bereiche im
Symmetriediagramm!



Aufgabe 1 – Symmetriediagramme



- ▶ Alle Primimplikate + deren schaltalgebraische Ausdrücke.
Kennzeichnen Sie durch Unterstreichen alle Kernimplikate.

Primimplikate:

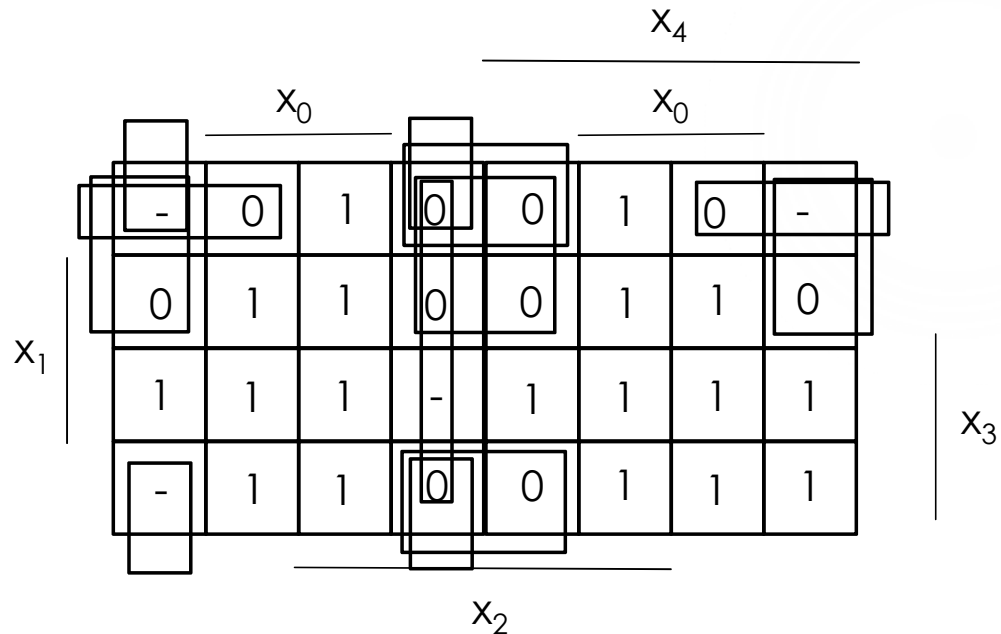
$x_3 + x_2 + x_1$,

$x_4 + x_1 + x_0$,

$x_4 + \overline{x_2} + x_0$,

$\overline{x_2} + x_1 + x_0$,

$x_3 + x_0$



Erinnerung: Kernterme überdecken eine Nullstelle (keine Freistelle!), die von keinem anderen Term überdeckt wird.

Vielen Dank für eure angenehme Aufmerksamkeit!

► Diesmal eine Zitathorde des großartigen Cicero:

“Accipere quam facere praestat iniuriam“ (schöner Subjektsinfinitiv!)

“Consuetudinis magna vis est“

“Patria est ubicumque bene est.“

“Cum tacent, clamant.“ (cum identidem, cum coincidens)

“Ut corpora nostra sine mente, sic civitas sine lege.“ (Parallelismus)