# GTI – ÜBUNG 6

NORMALFORM, MINIMALFORM UND DER ENTWICKLUNGSSATZ

Friedrich-Alexander Universität Erlangen-Nürnberg
Jan Spieck

# Aufgabe 1 - Boolesche Algebra

- Beweisen oder widerlegen Sie die folgenden Aussagen, ohne Wahrheitstabellen zu verwenden. Für Aussagen, die nicht wahr sind, geben Sie ein Gegenbeispiel an.
- Für Aussagen die wahr sind, geben Sie die entsprechenden Regeln an, mit welchen die Eigenschaft bewiesen werden kann.

# Aufgabe 1 - Boolesche Algebra

Friedrich-Alexander Universität Erlangen-Nürnberg
Jan Spieck

Begriffsklärung:

Boolesche Algebra:

- Spezielle algebraische Struktur auf Basis der vorgestellten Operatoren UND, ODER, sowie der Negation
- Wichtige Gesetze:
  - Kommutativgesetz: $(A \cdot B) = (B \cdot A)$ $(A + B) = (B + A)$
  - Assoziativgesetz: $(A \cdot B) \cdot C = A \cdot (B \cdot C)$ $(A + B) + C = A + (B + C)$
  - Distributivgesetz: $(A + B) \cdot C = A \cdot C + B \cdot C$ $(A \cdot B) + C = (A + C) \cdot (B + C)$
  - De Morgan: $\overline{(A \cdot B)} = \overline{A} + \overline{B}$ $\overline{(A + B)} = \overline{A} \cdot \overline{B}$

# Aufgabe 1 - Boolesche Algebra

Friedrich-Alexander Universität Erlangen-Nürnberg
Jan Spieck

- Weitere Regeln für die Vereinfachung der Ausdrücke

- Wichtige Gesetze:
  - XOR: $A \oplus B = (A \cdot \bar{B}) + (\bar{A} \cdot B)$
  - Idempotenz: $(A + A) = A$ $(A \cdot A) = A$
  - Absorption: $A \cdot (A + B) = A$ $A + (A \cdot B) = A$
  - Consensus: $(A \cdot B) + (\bar{A} \cdot C) + (B \cdot C) = (A \cdot B) + (\bar{A} \cdot C)$
    $(A + B) \cdot (\bar{A} + C) \cdot (B + C) = (A + B) \cdot (\bar{A} + C)$

Von all diesen Gesetzen gibt es auch den multivaribablen Fall, der aber analog zu behandeln ist. Vor allem der Consensus ist nicht immer einfach zu entdecken.

Tipp: häufig, wenn man nicht weiter kommt, gilt der Consensus ☺

# Aufgabe 1 - Boolesche Algebra

- $\bar{x} \oplus (x + y) = x + \bar{y}$

Hinweis: XOR kann durch elementare Aussagenlogik wiedergegeben werden

# Aufgabe 1 - Boolesche Algebra

- $\bar{x} \oplus (x + y) = x + \bar{y}$

$\bar{x} \oplus (x + y)$ | Nutzen der Definition von XOR $((A \cdot \bar{B}) + (\bar{A} \cdot B))$

$= \bar{x} \cdot \overline{(x + y)} + x \cdot (x + y)$ | Nutzen der Absorptionsregel

$= \bar{x} \cdot \overline{(x + y)} + x$ | Nutzen von De Morgan

$= \bar{x} \cdot \bar{x} \cdot \bar{y} + x$ | Idempotenz

$= \bar{x} \cdot \bar{y} + x$ | Jetzt kommt ein doppelter Negationstrick

$= \overline{\overline{\bar{x} \cdot \bar{y} + x}}$ | 2 x De Morgan

$= \overline{(x + y) \cdot \bar{x}}$ | Distributivgesetz

$= \overline{(x \cdot \bar{x} + y \cdot \bar{x})}$ | $x \cdot \bar{x}$ ist immer falsch, dann De Morgan

$= \overline{(y \cdot \bar{x})}$ $= x + \bar{y}$ -> ok!

Friedrich-Alexander Universität Erlangen-Nürnberg
Jan Spieck

# Aufgabe 1 - Boolesche Algebra

- $(x + y)(x + y \;\; \cdot z) = (x + y \;\; \cdot z)$

Hinweis: Weiß reflektiert das sichtbare Spektrum des Lichts zur Gänze, während die Farbe Schwarz …

Friedrich-Alexander Universität Erlangen-Nürnberg
Jan Spieck

# Aufgabe 1 - Boolesche Algebra

- $(x+y)(x+y\ \cdot z) = (x+y\ \cdot z)$

Hier greift eine Variante der Absorptionsregel, da $(x+y\ \cdot z) \geq (x+y)$

Sprich $(x+y\ \cdot z)$ ist eine stärkere Bedingung als $(x+y)$

Man kann auch sagen, dass

$(x+y\ )$ ein Spezialfall von

$(x+y \cdot z)$ ist.

Nämlich der Fall das z = 1.

Es muss beides erfüllt sein!

| **X** | **Y** | **Z** | $(x+y)$ | $(x+y\ \cdot z)$ |
|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 0 | 0 | 1 | 0 | 0 |
| 0 | 1 | 0 | 1 | 0 |
| 0 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 1 | 0 | 0 | 1 | 1 |
| 1 | 0 | 1 | 1 | 1 |
| 1 | 1 | 0 | 1 | 1 |
| 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |

Friedrich-Alexander Universität Erlangen-Nürnberg
Jan Spieck

# Aufgabe 1 - Boolesche Algebra

- $ab + \bar{b}c\bar{d} + ac\bar{d} = ab + \bar{b}c\bar{d}$

Hinweis: Zustimmung bzw. Mitgefühl sind hier gefragt

Friedrich-Alexander Universität Erlangen-Nürnberg
Jan Spieck

# Aufgabe 1 - Boolesche Algebra

- $ab + \bar{b}c\bar{d} + ac\bar{d} = ab + \bar{b}c\bar{d}$

Dies ist ein klassischer Fall des Consensus.

Voraussetzung sind zwei Ausdrücke, die dasselbe Literal besitzen, wobei ein Ausdruck es in negierter und der andere in nicht negierter Version aufweist.

Hier: $ab$, $\bar{b}c\bar{d}$ teilen sich das Literal b

Zudem muss der dritte Ausdruck Komposition der beiden vorherigen Ausdrücke sein exklusive des geteilten Literals.

Hier: $ab$, $\bar{b}c\bar{d}$ ohne das Literal b ergibt $a, c\bar{d}$.

Komponiert $ac\bar{d}$, welches tatsächlich existiert und somit wegfällt.

Friedrich-Alexander Universität Erlangen-Nürnberg
Jan Spieck

# Aufgabe 1 - Boolesche Algebra

Friedrich-Alexander Universität Erlangen-Nürnberg
Jan Spieck

- $xy + x(y + z) = x(y + z)$

Hinweis: zwei Regeln führen hier zum Erfolg

# Aufgabe 1 - Boolesche Algebra

- $xy + x(y + z) = x(y + z)$

| | |
|---|---|
| $xy + x(y + z)$ | \| Distributivgesetz |
| $= xy + xy + xz$ | \| Idempotenz |
| $= xy + xz$ | \| Distributivgesetz |
| $= x(y + z)$ | |

Friedrich-Alexander Universität Erlangen-Nürnberg
Jan Spieck

# Aufgabe 1 - Boolesche Algebra

- $ab + \bar{b}c\bar{d} + ac\bar{d} = ab + c\bar{d}$

Hinweis: warum so viel Begleittext, wenn alle Ausdrücke richtig wären?

der obige Ausdruck sollte einem bekannt vorkommen

Friedrich-Alexander Universität Erlangen-Nürnberg
Jan Spieck

# Aufgabe 1 - Boolesche Algebra

- $ab + \bar{b}c\bar{d} + ac\bar{d} = ab + c\bar{d}$

Wir hatten durch Consensus in Aufgabe c bewiesen:

$$ab + \bar{b}c\bar{d} + ac\bar{d} = ab + \bar{b}c\bar{d}$$

Wir können nun also schreiben:

$ab + \bar{b}c\bar{d} = ab + c\bar{d}$ |Wir „subtrahieren“ $ab$

$\bar{b}c\bar{d} = c\bar{d}$ |Wir „dividieren“ $c\bar{d}$

$\bar{b} = 1$

Was wir nicht wirklich schlussfolgern können. Also ist dieser Ausdruck nicht wahr!

Friedrich-Alexander Universität Erlangen-Nürnberg
Jan Spieck

# Aufgabe 2 – DNF, SOP, POS

Friedrich-Alexander Universität Erlangen-Nürnberg
Jan Spieck

## Beschreibung

- Bestimmen Sie die disjunktive Normalform (DNF) der folgenden Funktionen:
  - a, $\mathrm{f(x,y,z)} = xyz + \bar{x}y + \bar{y}z$
  - b, $\mathrm{f(x,y,z)} = xy + \bar{x}\bar{y}z + x\bar{y}\bar{z}$

# Aufgabe 2 – DNF, SOP, POS

Friedrich-Alexander Universität Erlangen-Nürnberg
Jan Spieck

Begriffsklärung:

Minterm (Vollkonjunktion):

- Reine Konjunktion aller existierenden Literale in negierter bzw. nicht negierter Form (d.h. alle Komponenten der Funktion kommen vor)
- Merkhilfe: minimale Anzahl an Einsern in Ergebnistabelle
- Seien also z.B. die Literale x, y und z Komponenten von f(x, y, z):
  - $x \cdot \bar{y} \cdot \bar{z}$ bzw. $x \cdot y \cdot \bar{z}$ sind Minterme
  - $x \cdot \bar{z}$ bzw. $x + y \cdot \bar{z}$ sind keine Minterme

Disjunktive Normalform (DNF):

- Disjunktion (d.h. Veroderung) aller Minterme (!)
- Beispiel: $(x \cdot \bar{y} \cdot \bar{z}) + (x \cdot y \cdot \bar{z}) + \ldots$

# Aufgabe 2 – DNF, SOP, POS

Friedrich-Alexander Universität Erlangen-Nürnberg
Jan Spieck

Begriffsklärung:

Maxterm (Volldisjunktion):

- Reine Disjunktion aller existierenden Literale in negierter bzw. nicht negierter Form (d.h. alle Komponenten der Funktion kommen vor)
- Merkhilfe: maximale Anzahl an Einsern in Ergebnistabelle
- Seien also z.B. die Literale x, y und z Komponenten von f(x, y, z):
  - $x + \bar{y} + \bar{z}$ bzw. $x + y + \bar{z}$ sind Maxterme
  - $x + \bar{z}$ bzw. $x + y \cdot \bar{z}$ sind keine Maxterme

Konjunktive Normalform (KNF):

- Konjunktion aller Maxterme (!)
- Beispiel: $(x + \bar{y} + \bar{z}) \cdot (x + y + \bar{z}) \cdot \ldots$

# Aufgabe 2 – DNF, SOP, POS

Begriffsklärung:

Disjunktive Minimalform (DMF):

- Disjunktion mehrerer durch Konjunktion verknüpften Literale, die (ohne ihre Form zu verletzen) nicht weiter vereinfacht werden kann
- Folglich also das Resultat einer Vereinfachung einer DNF

Konjunktive Minimalform (KMF):

- Konjunktion mehrerer durch Disjunktion verknüpften Literale, die (ohne ihre Form zu verletzen) nicht weiter vereinfacht werden kann
- Folglich also das Resultat einer Vereinfachung einer KNF

Achtung: in der Literatur wird diese Minimalform oft auch als DNF/KNF angesehen

Friedrich-Alexander Universität Erlangen-Nürnberg
Jan Spieck

# Aufgabe 2 – DNF, SOP, POS

DNF von $\mathrm{f(x,y,z)} = xyz + \underbrace{\bar{x}y + \bar{y}z}$

Problem: keine DNF, da nicht nur Minterme vorliegen

Lösung: wir verwenden das Distributivgesetz: $\bar{x}y$ = $\bar{x}y\ (z + \ \bar{z})$ = $\bar{x}yz + \bar{x}y\bar{z}$

$\mathrm{f(x,y,z)} = xyz + \bar{x}y + \bar{y}z$

= $xyz + \bar{x}yz + \bar{x}y\bar{z} \ + x\bar{y}z + \bar{x}\bar{y}z$

Friedrich-Alexander Universität Erlangen-Nürnberg
Jan Spieck

# Aufgabe 2 – DNF, SOP, POS

DNF von $\mathrm{f(x, y, z)} = \underbrace{xy} + \bar{x}\bar{y}z + x\bar{y}\bar{z}$

Problem: keine DNF, da nicht nur Minterme vorliegen

Lösung: wir verwenden das Distributivgesetz:

$\mathrm{f(x, y, z)} = xy + \bar{x}\bar{y}z + x\bar{y}\bar{z}$

$= xyz + xy\bar{z} + \bar{x}\bar{y}z + x\bar{y}\bar{z}$

Friedrich-Alexander Universität Erlangen-Nürnberg
Jan Spieck

# Aufgabe 2 – DNF, SOP, POS

Beschreibung

- Bestimmen Sie die primären Kosten (Kosten der UND-Verknüpfung) und sekundären Kosten (Kosten der ODER-Verknüpfung) der Funktionen aus i und ii sowie deren DNFs.
- Benutzen Sie als Kostenmaß die Anzahl der jeweils verknüpften Signale

Friedrich-Alexander Universität Erlangen-Nürnberg
Jan Spieck

# Aufgabe 2 – DNF, SOP, POS

Friedrich-Alexander Universität Erlangen-Nürnberg
Jan Spieck

Wir zählen einfach die Anzahl der durch UND bzw. ODER verknüpften Literale.

Primärkosten: Anzahl der durch UND verknüpften Literale

Sekundärkosten: Anzahl der durch ODER verknüpften Literale

| **Name** | **Funktionen** | **Primärkosten** | **Sekundärkosten** | **Gesamtkosten** |
|---|---|---|---|---|
| $f_1$ | $xyz + \bar{x}y + \bar{y}z$ | 7 | 3 | 10 |
| $DNF_1$ | $xyz + \bar{x}yz + \bar{x}y\bar{z}$ $+ x\bar{y}z + \bar{x}\bar{y}z$ | 15 | 5 | 20 |
| $f_2$ | $xy + \bar{x}\bar{y}z + x\bar{y}\bar{z}$ | 8 | 3 | 11 |
| $DNF_2$ | $xyz + xy\bar{z} + \bar{x}\bar{y}z + x\bar{y}\bar{z}$ | 12 | 4 | 16 |

# Aufgabe 2 – DNF, SOP, POS

Friedrich-Alexander Universität Erlangen-Nürnberg
Jan Spieck

- Konvertieren Sie die folgenden Funktionen von POS (Products Of Sums) nach SOP (Sums Of Products)
- Konvertieren Sie also von einer konjunktive Form (KF) auf eine disjunktive Form (DF) :

$$\mathrm{f(w,x,y,z)} = (\overline{w} + z)(\overline{w} + x + y)(x + \overline{y} + z)$$

Hinweis: dieser Weg ist für viele intuitiver als NF zu KF. Wir nutzen das Distributivgesetz (aber in der „normalen“ Richtung)

# Aufgabe 2 – DNF, SOP, POS

POS nach SOP: Idempotenz bei der Auflösung des Distributivgesetzes nicht mehr explizit vermerkt

$\mathrm{f(w,x,y,z)} = (\overline{w} + z)(\overline{w} + x + y)(x + \overline{y} + z)$ | Distributivgesetz

$= (\overline{w} + z)[\overline{w}x + \overline{w}\overline{y} + \overline{w}z + x + x\overline{y} + xz + xy + y\overline{y} + yz]$ | Absorption

$= (\overline{w} + z)[\overline{w}\overline{y} + \overline{w}z + x + y\overline{y} + yz]$ | Unerfüllbarkeit

$= (\overline{w} + z)[\overline{w}\overline{y} + \overline{w}z + x + yz]$ | Consensus

$= (\overline{w} + z)[\overline{w}\overline{y} + x + yz]$ | Distributivgesetz

$= \overline{w}\overline{y} + \overline{w}x + \overline{w}yz + \overline{w}\overline{y}z + xz + yz$ | Absorption

$= \overline{w}\overline{y} + \overline{w}x + xz + yz$

Friedrich-Alexander Universität Erlangen-Nürnberg
Jan Spieck

# Aufgabe 2 – DNF, SOP, POS

## Beschreibung

- Konvertieren Sie die folgenden Funktionen von SOP (Sums Of Products) nach POS (Products Of Sums).
- Konvertieren Sie also von einer Disjunktiven Form (DF) auf eine konjunktive Form (KF):

  a, $\mathrm{f}(\mathrm{x}, \mathrm{y}, \mathrm{z}) = xyz + \bar{x}y + \bar{y}z$

  b, $\mathrm{f}(\mathrm{w}, \mathrm{x}, \mathrm{y}, \mathrm{z}) = wx + \bar{w}z + w\bar{y}\bar{z}$

# Aufgabe 2 – DNF, SOP, POS

- Rechenregeln für Konvertierung von SOP nach POS

Wir können uns für kleinere Fälle folgende Regeln herleiten:

Rechenregel 1: $a + bc = (a+b)\,(a+c)$

Rechenregel 2: $ab + cd = (a+c)\,(a+d)\,(b+c)\,(b+d)$

Rechenregel 3: $ab + cde = (a+c)\,(a+d)\,(a+e)\,(b+c)\,(b+d)\,(b+e)$

Daraus sehen wir also die Rechenregel für den allgemeinen Fall:

$(a_1b_1\ldots) + (a_2b_2\ldots) + (a_3b_3\ldots)\ \ldots$

$= (a_1 + a_2 + a_3 + \ldots)\,(a_1 + a_2 + b_3 + \ldots)\,(a_1 + b_2 + a_3 + \ldots)\ \ldots$

D.h. wir bilden alle möglichen Permutationen, wobei wir deren Literale addieren und die Permutationen an sich multiplizieren.

Wir wenden ergo das Distributivgesetz auf die Formeln an!

Friedrich-Alexander Universität Erlangen-Nürnberg
Jan Spieck

# Aufgabe 2 – DNF, SOP, POS

Wir suchen $\mathrm{f(x,y,z)} = xyz + \bar{x}y + \bar{y}z$ in einer Form $(\_ + \_ + \_) \cdot (\_ + \_ + \_) \cdot \ldots$

Dazu versuchen wir die konjugierten Terme durch ein Produkt einer Disjunktion auszudrücken. Zuerst lohnt sich häufig eine Vereinfachung.

Rechenregel 1: a + bc = (a+b) (a+c) |Absorption von a, nur bc übrig

| | |
|---|---|
| $\mathrm{f(x,y,z)} = xyz + \bar{x}y + \bar{y}z$ | \|DNF |
| $= xyz + \bar{x}yz + \bar{x}y\bar{z} + x\bar{y}z + \bar{x}\bar{y}z$ | \|Idempotenz |
| $= \bar{x}yz + \bar{x}y\bar{z} + x\bar{y}z + \bar{x}\bar{y}z + \bar{x}yz + xyz$ | \|Distributivgesetz |
| $= \bar{x}y + \bar{y}z + yz$ | \|Distributivgesetz |
| $= \bar{x}y + z$ | \|Rechenregel 1 |
| $= (\bar{x} + z)(y + z)$ | |

Friedrich-Alexander Universität Erlangen-Nürnberg
Jan Spieck

# Aufgabe 2 – DNF, SOP, POS

Wir suchen $\mathrm{f(w,x,y,z)} = wx + \bar{w}z + w\bar{y}\bar{z}$ in einer Form $(\_ + \_ + \_) \cdot (\_ + \_ + \_) \cdot \ldots$

Rechenregel 2: ab + cd = (a+c) (a+d) (b+c) (b+d)

Rechenregel 3: ab + cde = (a+c) (a+d) (a+e) (b+c) (b+d) (b+e)

$\mathrm{f(w,x,y,z)} = wx + \bar{w}z + w\bar{y}\bar{z}$ |R2

$= [(w + \bar{w})(w + z)(\bar{w} + x)(x + z)] + w\bar{y}\bar{z}$ |Tertium non datur

$= [(w + z)(\bar{w} + x)(x + z)] + w\bar{y}\bar{z}$ |Consensus

$= [(w + z)(\bar{w} + x)] + w\bar{y}\bar{z}$ | R3, dann IP und Absorption

$= (\mathrm{w} + \mathrm{w} + \mathrm{z})(\mathrm{w} + \bar{w} + \mathrm{x})(\mathrm{w} + \bar{y} + \mathrm{z})(\bar{w} + \mathrm{x} + \bar{y})(\mathrm{w} + \mathrm{z} + \bar{z})(\bar{w} + \mathrm{x} + \bar{z})$

$= (\mathrm{w} + \mathrm{z})(\mathrm{w} + \bar{w} + \mathrm{x})(\bar{w} + \mathrm{x} + \bar{y})(\bar{w} + \mathrm{x} + \bar{z})$ |Tertium non datur

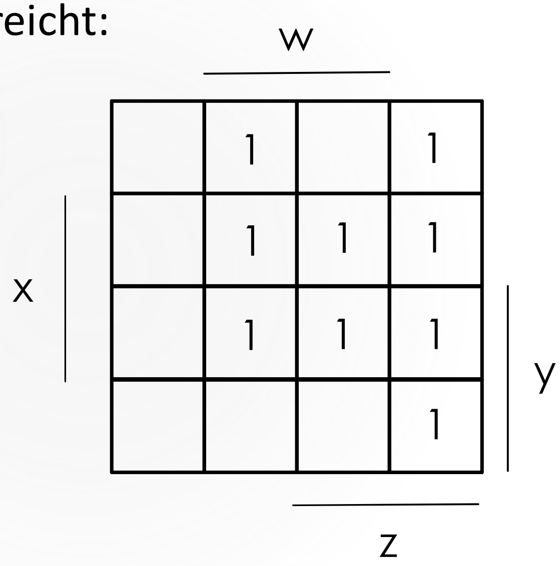
$= (\mathrm{w} + \mathrm{z})(\bar{w} + \mathrm{x} + \bar{y})(\bar{w} + \mathrm{x} + \bar{z})$ Es gibt weitere Lösungen!

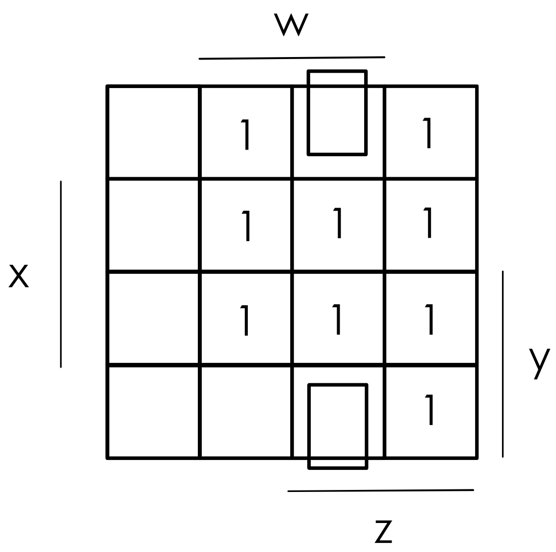
Friedrich-Alexander Universität Erlangen-Nürnberg
Jan Spieck

# Aufgabe 2 – DNF, SOP, POS

Wir suchen $\mathrm{f(w,x,y,z)} = wx + \overline{w}z + w\overline{y}\overline{z}$ in einer Form $(\_ + \_ + \_) \cdot (\_ + \_ + \_) \cdot \ldots$

Das Verfahren der Multiplikation aller konjugierten Permutationen ist manchmal sehr aufwendig. Für die Umformung bieten sich deshalb Symmetriediagramme an, mit denen man sowohl schneller, leichter, als auch weniger fehleranfällig sein Ziel erreicht:




Diese Überdeckung entspricht:

$(\mathrm{w} + \mathrm{z}) \cdot$
$(\overline{w} + \mathrm{x} + \overline{y}) \cdot$
$(\overline{w} + \mathrm{x} + \overline{z})$

Friedrich-Alexander Universität Erlangen-Nürnberg
Jan Spieck

# Aufgabe 2 – DNF, SOP, POS

- Wie unterscheiden sich die technischen Realisierungen der beiden Formen?

Zur Erinnerung:

SOP (Sum of Products): z.B. $\overline{w}\overline{y} + \overline{w}x + xz + yz$

POS (Product of Sums): z.B. $(\mathrm{w} + \mathrm{z})(\overline{w} + \mathrm{x} + \overline{y})(\overline{w} + \mathrm{x} + \overline{z})$

| | Erste Ebene | Zweite Ebene |
|---|---|---|
| SOP – Form: | UND-Feld | ODER-Feld |
| POS – Form: | ODER-Feld | UND-Feld |

Genauere Umsetzung mittels PAL, PLA wird später besprochen.

Friedrich-Alexander Universität Erlangen-Nürnberg
Jan Spieck

# Denkpause

- Ein Direktor einer Gefängnisanstalt macht seinen hundert Häftlingen ein Angebot. Es kommen alle frei, wenn sie folgende Aufgabe lösen können:
- Jeden Tag wird der Direktor einen Gefangenen aussuchen, der in einen Raum geführt wird, in dem sich nur eine Lampe befindet, die an- oder ausgeschalten werden kann. Der Gefangene darf sich dort kurz aufhalten und nichts außer dem Zustand der Lampe verändern.
- Nach dem Aufenthalt darf die ausgewählte Person den Direktor ansprechen, wenn sie sicher ist, dass alle Gefangenen vor ihm auch in dem Raum gewesen sind
- Alle Gefangenen sind isoliert voneinander und dürfen sich nur einmalig vor der Aktion eine Stunde lang besprechen.

# Denkpause

Lösung:

Die Gefangenen legen in ihrer Unterredung einen Sträfling fest, der das Zählen übernimmt.

<u>Jeder der Gefangene außer dem Zähler führt den folgenden Algorithmus aus:</u>

Wenn die Lampe aus ist, schaltet er diese an, falls er zuvor noch nie die Lampe angeschaltet hat. Ansonsten lässt er die Lampe in ihrem Zustand.

<u>Der Zähler führt den folgenden Algorithmus aus:</u>

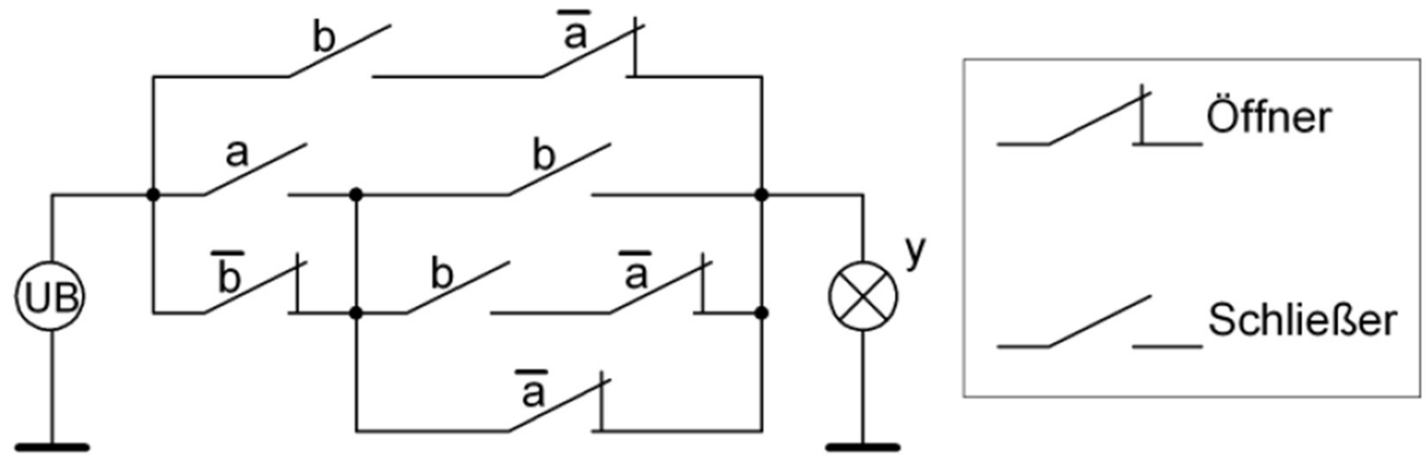
Ist die Lampe angeschaltet, weiß der Zähler, dass ein neuer Sträfling im Raum war, zählt eins hoch und schaltet die Lampe aus. Ist die Lampe ausgeschaltet, war in der Zwischenzeit kein neuer Gefangene im Raum, so dass er nicht hochzählt und die Lampe unverändert lässt.

Hat der Zähler bis 99 gezählt, kann er dem Direktor Bescheid geben.

Friedrich-Alexander Universität Erlangen-Nürnberg
Jan Spieck

# Aufgabe 3 – Relaisschaltnetz

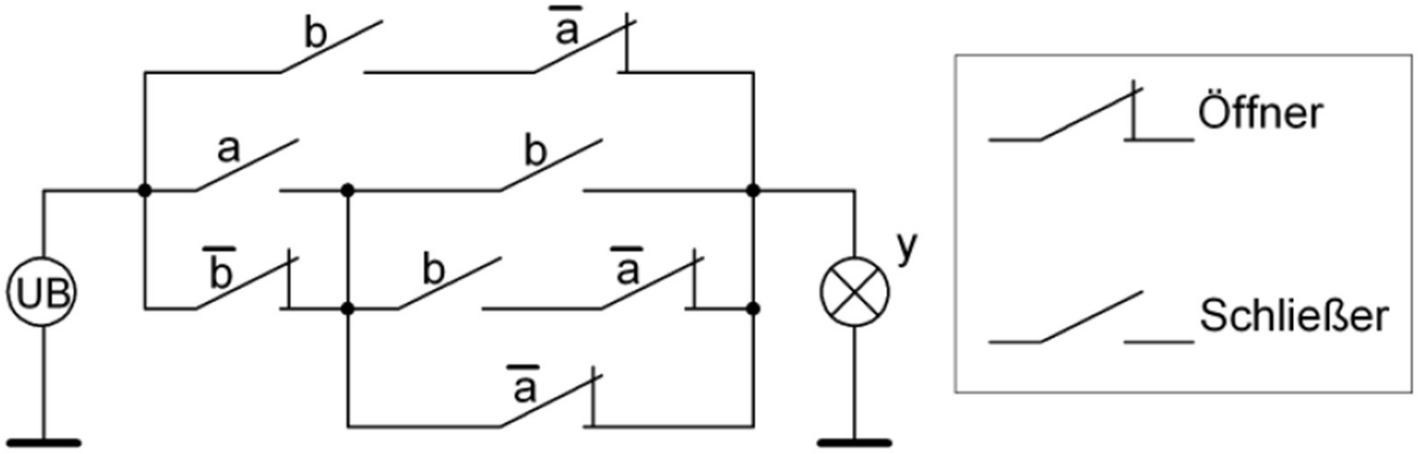
- Gegeben sei das im nachstehenden Bild dargestellte Relaisschaltnetz:




Friedrich-Alexander Universität Erlangen-Nürnberg
Jan Spieck

# Aufgabe 3 – Relaisschaltnetz

- Bilden Sie daraus den entsprechenden schaltalgebraischen Ausdruck und vereinfachen Sie ihn. Wie wird die realisierte Funktion bezeichnet?




Friedrich-Alexander Universität Erlangen-Nürnberg
Jan Spieck

# Aufgabe 3 – Relaisschaltnetz

Wir bilden das gegebene Schaltnetz auf Aussagenlogik ab. Dazu nutzen wir elementare Regeln:

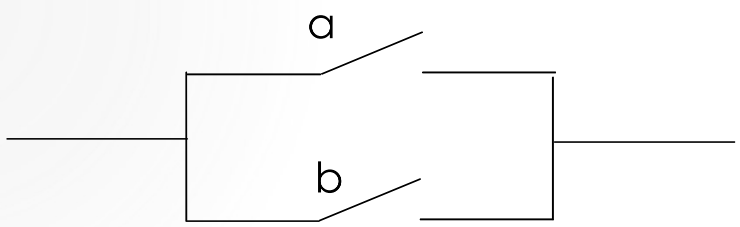
Serienschaltung → Konjunktion

Beispiel:


$\rightarrow a \cdot b$

Parallelschaltung → Disjunktion

Beispiel:



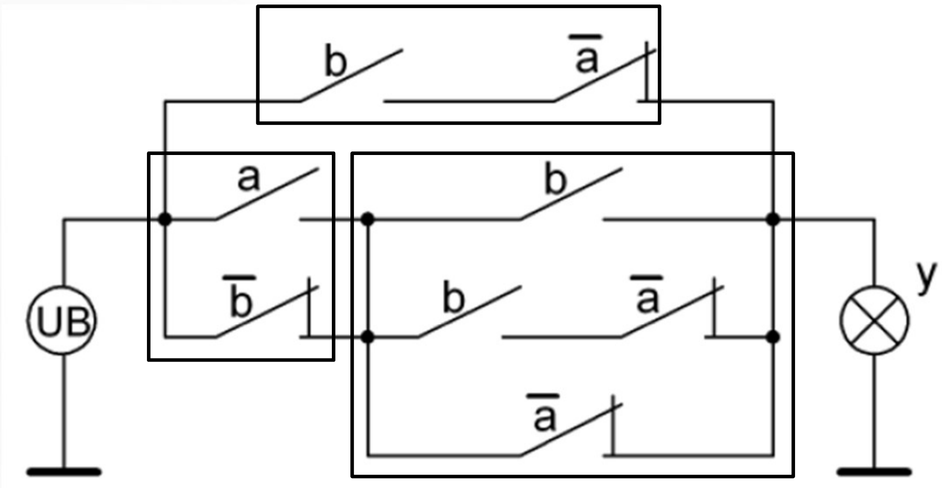

$\rightarrow a + b$

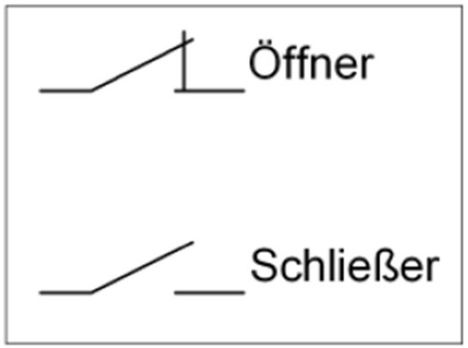
Friedrich-Alexander Universität Erlangen-Nürnberg
Jan Spieck

# Aufgabe 3 – Relaisschaltnetz

Anwendung der elementaren Regeln:

$$y = \left[\left((\bar{a} \cdot b) + \bar{a} + b\right)\left(a + \bar{b}\right)\right] + (\bar{a} \cdot b)$$




Friedrich-Alexander Universität Erlangen-Nürnberg
Jan Spieck

# Aufgabe 3 – Relaisschaltnetz

Wir erhalten folgende aussagenlogische Form:

$y = \left[\left((\bar{a} \cdot b) + \bar{a} + b\right)\left(a + \bar{b}\right)\right] + (\bar{a} \cdot b)$ |Absorption

$= \left[(\bar{a} + b)\left(a + \bar{b}\right)\right] + (\bar{a} \cdot b)$ |Distributivgesetz

$= \left[(\bar{a} \cdot a) + (a \cdot b) + (\bar{a} \cdot \bar{b}) + (\bar{b} \cdot b)\right] + (\bar{a} \cdot b)$ |Assoziativgesetz

$= (\bar{a} \cdot a) + (a \cdot b) + (\bar{a} \cdot \bar{b}) + (\bar{b} \cdot b) + (\bar{a} \cdot b)$ |Unerfüllbare Literale

$= (a \cdot b) + (\bar{a} \cdot \bar{b}) + (\bar{a} \cdot b)$ |Umgekehrte Idempotenz

$= (a \cdot b) + (\bar{a} \cdot b) + (\bar{a} \cdot \bar{b}) + (\bar{a} \cdot b)$ |Distributivgesetz

$= b\,(a + \bar{a}) + \bar{a}\left(\bar{b} + b\right)$ |Tertium non datur

$= b + \bar{a}$

Dies ist die Auflösung der Implikation a → b

Friedrich-Alexander Universität Erlangen-Nürnberg
Jan Spieck

# Aufgabe 3 – Relaisschaltnetz

- Entwerfen Sie ein Relaisschaltnetz, das die negierte Konjunktion realisiert.

Hinweis: Umformen der Formel auf eine Darstellung ohne Negierung der Verknüpfung

Friedrich-Alexander Universität Erlangen-Nürnberg
Jan Spieck

# Aufgabe 3 – Relaisschaltnetz

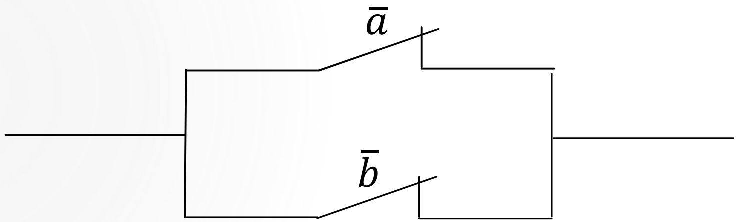
Die negierte Negation mit zwei Literalen a und b lässt sich folgendermaßen darstellen:

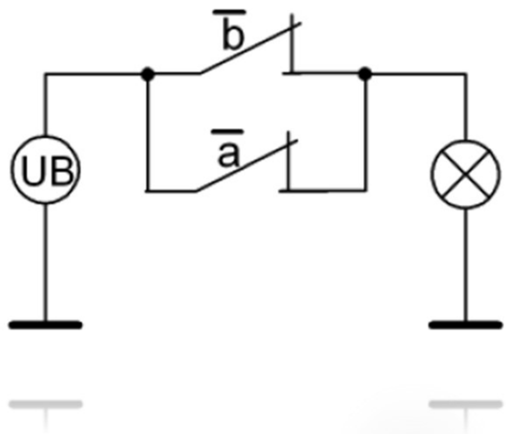
$$\overline{a \cdot b}$$

Wir benutzen dazu die Regel von De Morgan:

$\overline{a \cdot b} = \bar{a} + \bar{b}$

Darstellung durch eine  Parallelschaltung:




Friedrich-Alexander Universität Erlangen-Nürnberg
Jan Spieck

# Aufgabe 4 – Entwicklungssatz

- Die gegebene Schaltfunktion y = f(a,b,c,d) soll mit Hilfe des Entwicklungssatzes entwickelt werden:

$$y = \bar{a}\bar{c} + b + \bar{d}\bar{c} + adc$$

Friedrich-Alexander Universität Erlangen-Nürnberg
Jan Spieck

# Aufgabe 4 – Entwicklungssatz

- Der Entwicklungssatz

Ziel: Darstellung einer aussagenlogischer Formel durch eine Komposition von Fallunterscheidungen der einzelnen Variablen

Sinn:

- Ermöglicht Darstellung eines Entscheidungsdiagramms (BDD)
- Ermöglicht Umwandlung einer Formel in eine DNF oder KNF
- Erleichtert dadurch Umwandlung von Aussagenlogik in Schaltnetze

Algorithmus:

Sukzessive Entwicklung nach allen Variablen (s. Aufgabenbearbeitung)

Friedrich-Alexander Universität Erlangen-Nürnberg
Jan Spieck

# Aufgabe 4 – Entwicklungssatz

- Der Entwicklungssatz

Entwicklung nach a:

Trennen einer aussagenlogischen Formel f(a, b, …) in $a$[ _ + _ + … ] + $\bar{a}$[ _ + _ + … ].

Fallunterscheidung:

- Jeder Term, der a enthält, wird exklusive a in $a$[…] hineingezogen.
- Jeder Term, der ein $\bar{a}$ enthält, wird exklusive $\bar{a}$ in $\bar{a}$[…] hineingezogen.
- Jeder Term, der weder a noch $\bar{a}$ enthält, wird vollständig in $\bar{a}$[…] und a[…] hineingezogen.

Für die Restterme (abgekürzt mit $F_a$ und $F_{\bar{a}}$) innerhalb $a$[ … ] und $\bar{a}$[ … ] wird nach demselben Schema nach anderen Variablen b, c … entwickelt.

Friedrich-Alexander Universität Erlangen-Nürnberg
Jan Spieck

# Aufgabe 4 – Entwicklungssatz

- Entwickeln Sie die Schaltfunktion nach der Variablen b. Geben Sie alle Zwischenschritte an.

$$y = \bar{a}\bar{c} + b + \bar{d}\bar{c} + adc$$

Hinweis: hier hilft die besprochene Fallunterscheidung

Friedrich-Alexander Universität Erlangen-Nürnberg
Jan Spieck

# Aufgabe 4 – Entwicklungssatz

Friedrich-Alexander Universität Erlangen-Nürnberg
Jan Spieck

- Entwickeln Sie die Schaltfunktion nach der Variablen b. Geben Sie alle Zwischenschritte an.

$$y = \bar{a}\bar{c} + b + \bar{d}\bar{c} + adc$$

| | | | |
|---|---|---|---|
| Terme mit b: | $b$ | → | $b$[ _ + _ + … ] exklusive b |
| Terme mit $\bar{b}$: | / | → | $\bar{b}$[ _ + _ + … ] exklusive $\bar{b}$ |
| Terme ohne b/$\bar{b}$: | $\bar{a}\bar{c}, adc,\ \bar{d}\bar{c}$ | → | vollständig in b $und\ \bar{b}$[ _ + _ + … ] |

Y = $b[1] + \bar{b}[\bar{a}\bar{c} + adc + \bar{d}\bar{c}] = b\ \mathrm{F_b} + \bar{b}\ F_{\bar{b}}$

# Aufgabe 4 – Entwicklungssatz

- Entwickeln Sie die Restfunktion zuerst nach der Variablen c und dann, falls erforderlich nach den verbleibenden Variablen, so dass als Restfunktion nur noch Konstanten (hier 0 oder 1) übrig bleiben. Geben Sie alle Zwischenschritte an.

$$y = \bar{a}\bar{c} + b + \bar{d}\bar{c} + adc$$

Hinweis: die Restterme werden getrennt entwickelt und dann zusammengesetzt

Friedrich-Alexander Universität Erlangen-Nürnberg
Jan Spieck

# Aufgabe 4 – Entwicklungssatz

- Entwickeln nach c, dann weiter bis nur Konstanten übrig bleiben

$$y = \bar{a}\bar{c} + b + \bar{d}\bar{c} + adc$$

$$F_b = 1 \qquad F_{\bar{b}} = \bar{a}\bar{c} + adc + \bar{d}\bar{c}$$

$$F_{\bar{b}c} = ad \qquad F_{\bar{b}\bar{c}} = \bar{a} + \bar{d}$$

$$F_{\bar{b}ca} = d \qquad F_{\bar{b}c\bar{a}} = 0 \qquad F_{\bar{b}\bar{c}a} = \bar{d} \qquad F_{\bar{b}\bar{c}\bar{a}} = 1$$

$$F_{\bar{b}cad} = 1 \qquad F_{\bar{b}ca\bar{d}} = 0 \qquad F_{\bar{b}\bar{c}ad} = 0 \qquad F_{\bar{b}\bar{c}a\bar{d}} = 1$$

Friedrich-Alexander Universität Erlangen-Nürnberg
Jan Spieck

# Aufgabe 4 – Entwicklungssatz

Hier noch einmal rein rechnerisch:

$$
\begin{aligned}
F_{\overline{b}} &= \overline{a}\,\overline{c} + \overline{c}\,\overline{d} + acd = c \cdot (ad) + \overline{c} \cdot (\overline{a} + \overline{d}) = \\
&= cF_{\overline{b}c} + \overline{c}F_{\overline{b}\,\overline{c}} \\
F_{\overline{b}c} &= ad = a \cdot d + \overline{a} \cdot 0 = aF_{\overline{b}ca} + \overline{a}F_{\overline{b}c\overline{a}} \\
F_{\overline{b}\,\overline{c}} &= (\overline{a} + \overline{d}) = a \cdot \overline{d} + \overline{a} \cdot 1 = aF_{\overline{b}\,\overline{c}a} + \overline{a}F_{\overline{b}\,\overline{c}\,\overline{a}} \\
F_{\overline{b}\,\overline{c}a} &= d \cdot 0 + \overline{d} \cdot 1 = dF_{\overline{b}\,\overline{c}ad} + \overline{d}F_{\overline{b}\,\overline{c}a\overline{d}} \\
F_{\overline{b}ca} &= d \cdot 1 + \overline{d} \cdot 0 = dF_{\overline{b}cad} + \overline{d}F_{\overline{b}ca\overline{d}}
\end{aligned}
$$

Friedrich-Alexander Universität Erlangen-Nürnberg
Jan Spieck

# Aufgabe 4 – Entwicklungssatz

- Zeichnen Sie das binäre Entscheidungsdiagramm zu folgender Funktion.

$$y = \bar{a}\bar{c} + b + \bar{d}\bar{c} + adc$$

Hinweis: dies ist eine grafische Darstellung der entwickelten Form

Friedrich-Alexander Universität Erlangen-Nürnberg
Jan Spieck

# Aufgabe 4 – Entwicklungssatz

- Zur Erinnerung die Teilaufgabe c

$$y = \bar{a}\bar{c} + b + \bar{d}\bar{c} + adc$$

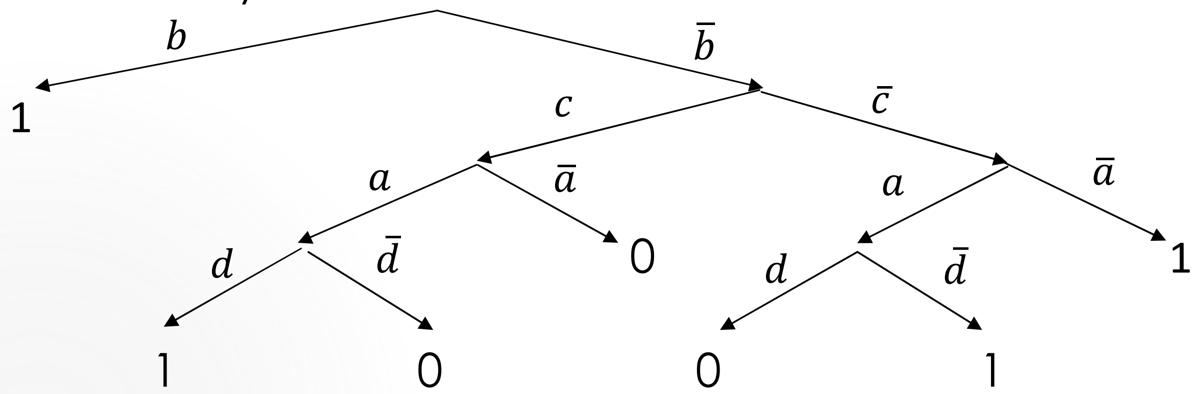
- $F_b = 1$
- $F_{\bar{b}} = \bar{a}\bar{c} + adc + \bar{d}\bar{c}$
  - $F_{\bar{b}c} = ad$
    - $F_{\bar{b}ca} = d$
      - $F_{\bar{b}cad} = 1$
      - $F_{\bar{b}ca\bar{d}} = 0$
    - $F_{\bar{b}c\bar{a}} = 0$
  - $F_{\bar{b}\bar{c}} = \bar{a} + \bar{d}$
    - $F_{\bar{b}\bar{c}a} = \bar{d}$
      - $F_{\bar{b}\bar{c}ad} = 0$
      - $F_{\bar{b}\bar{c}a\bar{d}} = 1$
    - $F_{\bar{b}\bar{c}\bar{a}} = 1$

Friedrich-Alexander Universität Erlangen-Nürnberg
Jan Spieck

# Aufgabe 4 – Entwicklungssatz

- Eine kürzere Darstellung der Aufgabe c

$$y = \bar{a}\bar{c} + b + \bar{d}\bar{c} + adc$$

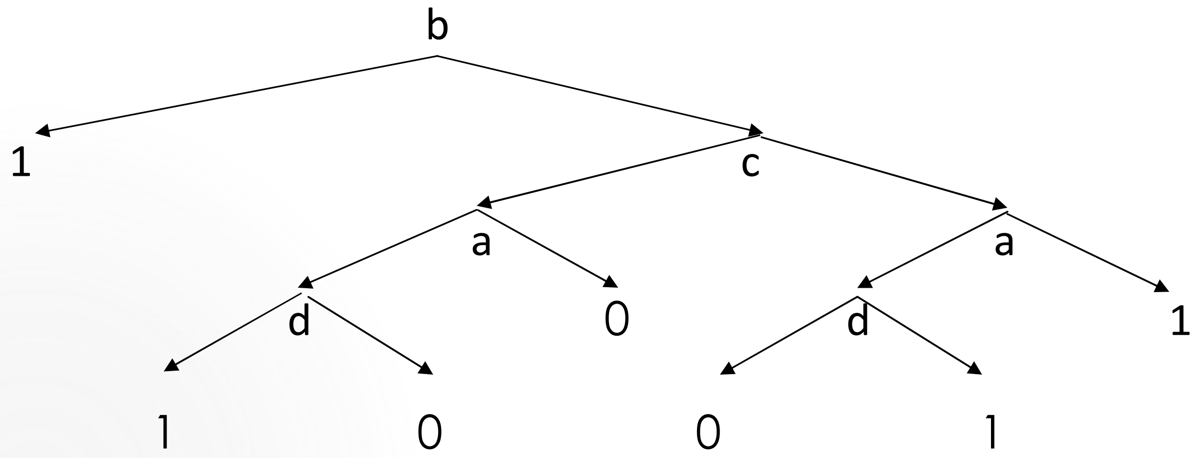



Nun werden wir im nächsten Schritt durch Einführen von Knoten, die nächste Variable, nach der entwickelt wird, indizieren und durch Färbung der Äste kennzeichnen, ob zur negierten oder nicht negierten Form entwickelt wurde.

Friedrich-Alexander Universität Erlangen-Nürnberg
Jan Spieck

# Aufgabe 4 – Entwicklungssatz

- Eine (noch) kürzere Darstellung der Aufgabe c

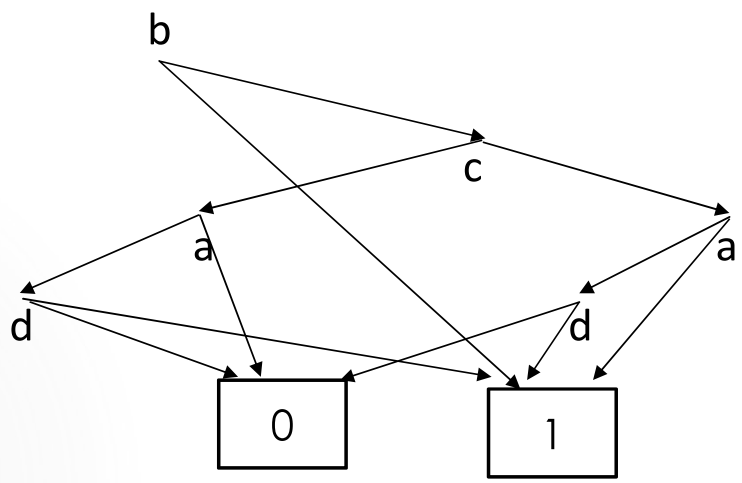



Das können wir noch verkürzen, indem wir alle Nullen und Einsen zu einem Kasten zusammenfassen. Der entstehende Baum ist unser BDD.

Friedrich-Alexander Universität Erlangen-Nürnberg
Jan Spieck

# Aufgabe 4 – Entwicklungssatz

- Eine (noch noch) kürzere Darstellung der Aufgabe c

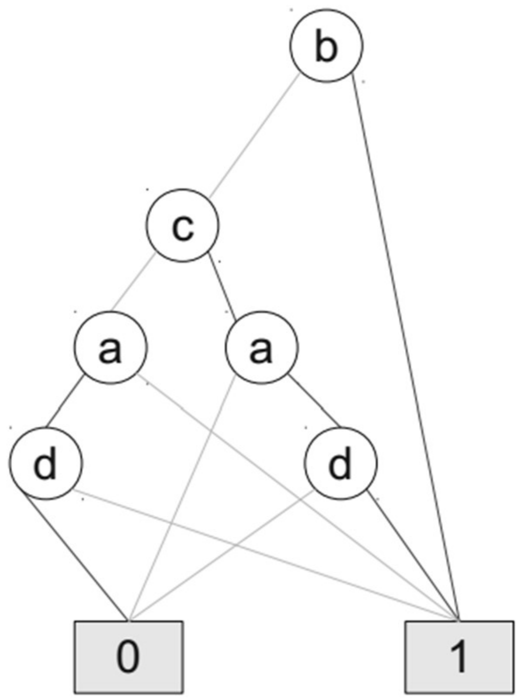


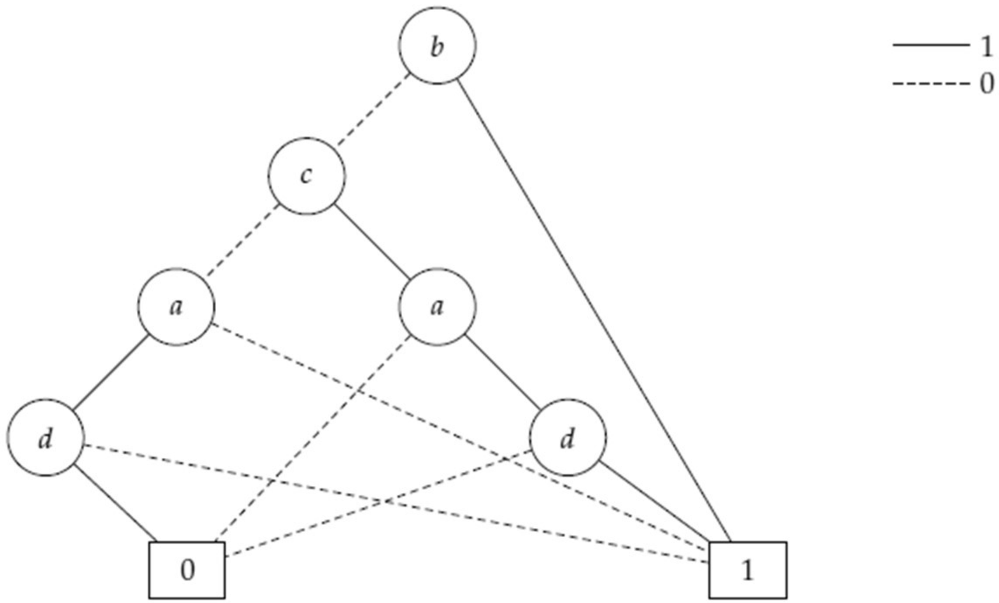

Dies ist unser binärer Entscheidungsbaum, wobei gelb für die Entwicklung zur nicht negierten und rot für die Entwicklung zur negierten Form steht.


Friedrich-Alexander Universität Erlangen-Nürnberg
Jan Spieck

# Aufgabe 4 – Entwicklungssatz

- Und noch einmal etwas geordneter:



# Vielen Dank für eure werte Aufmerksamkeit

"La originalidad consiste en el retorno al origen; así pues, original es aquello que vuelve a la simplicidad de las primeras soluciones."

**Antoni Gaudi**

Friedrich-Alexander Universität Erlangen-Nürnberg
Jan Spieck