

GTI – ÜBUNG 5

SCHALTFUNKTIONEN UND LOGIK

Aufgabe 1 – Darstellung von SF



Beschreibung

- ▶ Geben Sie für die folgenden Schaltfunktionen jeweils die Funktionstabelle, ein Symmetriediagramm, ein Binary Decision Diagram und ein Gatterschaltnetz an:

I. $f_1(x, y) = x \oplus y$

II. $f_2(x, y, z) = (x + y)z$

III. $f_3(x, y, z) = xy\bar{z} + \overline{x + \bar{y} + z}$

Aufgabe 1 – Darstellung von SF

Begriffsklärung:

AND – Verknüpfung:

- Mathematisch oft dargestellt als \wedge
- Wir benutzen stattdessen ein \cdot , da dies z.B. das Distributivgesetz anschaulicher macht

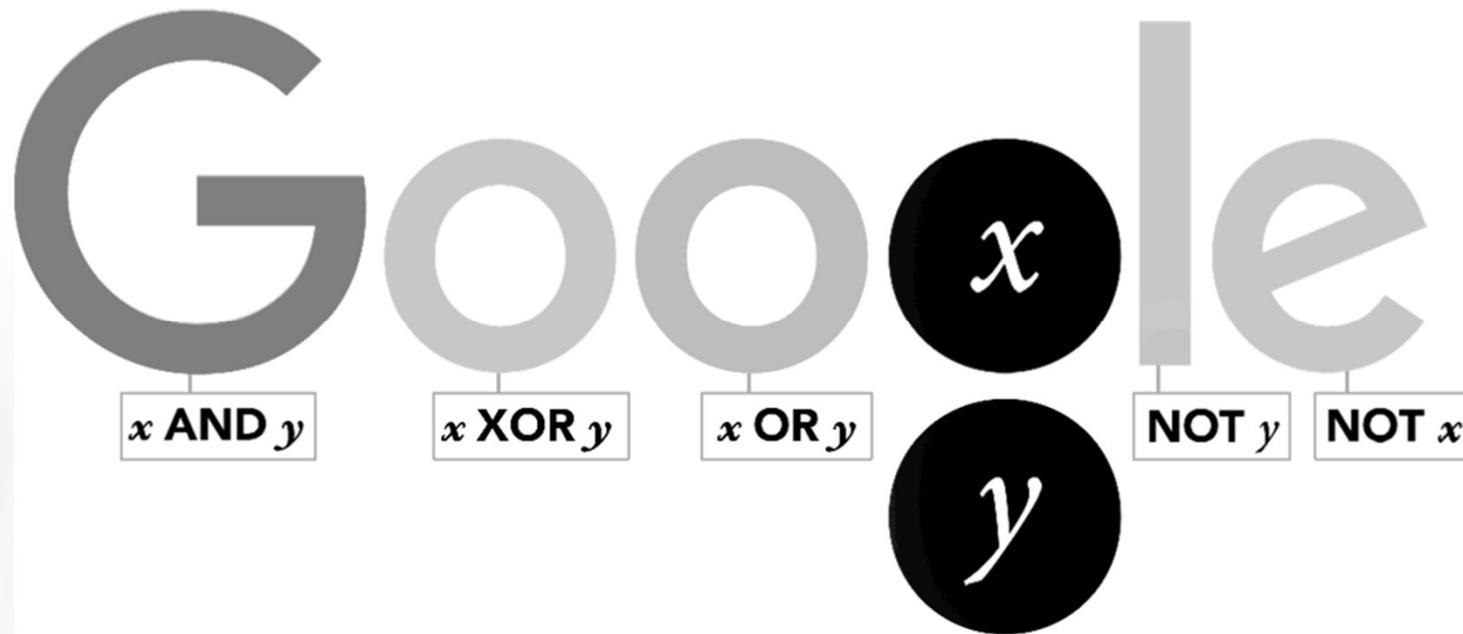
OR – Verknüpfung:

- Mathematisch oft dargestellt als \vee (vel = lat. oder)
- Wir benutzen stattdessen ein $+$, da dies z.B. das Distributivgesetz anschaulicher macht

Negierung:

- Wird dargestellt als horizontale Linie über dem zu negierenden Literal, z.B. \bar{A}

Aufgabe 1 – Darstellung von SF



- ▶ <http://www.google.com/doodles/george-booles-200th-birthday>

Aufgabe 1 – Darstellung von SF

► Funktionstabellen

- Enthält die Funktionswerte für alle Permutationen der Variablenwerte
- Jede Variable kann entweder true (= 1) oder falsch sein (= 0)
- Es gibt somit bei n Variablen 2^n verschiedene Kombinationen (= Zeilen in der Tabelle)

A	B	$f(A, B)$
0	0	0
0	1	0
1	0	1
1	1	0


Variablenwerte Korrespondierende
Reihenfolge egal Funktionswerte

Aufgabe 1 – Darstellung von SF

- ▶ Schaltfunktion von $f_1(x, y) = x \oplus y$

x	y	$f_1(x, y)$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	0

└──┬──┘ └──┬──┘
Variablenwerte Korrespondierende
Reihenfolge egal Funktionswerte

Aufgabe 1 – Darstellung von SF

- Schaltfunktion von $f_2(x, y, z) = (x + y)z$

x	y	z	$(x + y)$	$(x + y)z$
0	0	0	0	0
0	0	1	0	0
0	1	0	1	0
0	1	1	1	1
1	0	0	1	0
1	0	1	1	1
1	1	0	1	0
1	1	1	1	1

Aufgabe 1 – Darstellung von SF

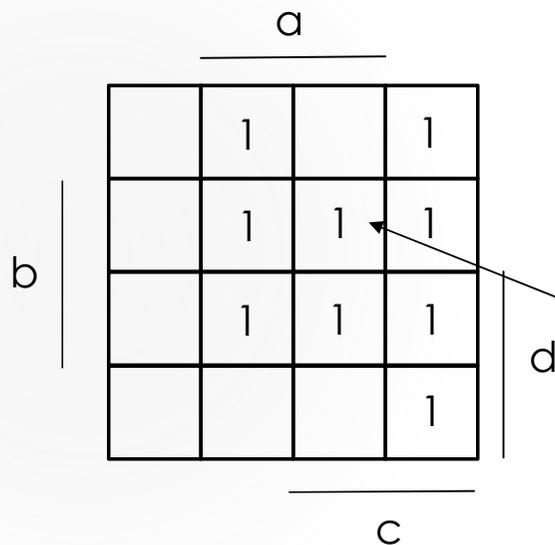
- Schaltfunktion von $f_3 = xy\bar{z} + \overline{x + \bar{y} + z}$

x	y	z	$xy\bar{z}$	$x + \bar{y} + z$	$xy\bar{z} + \overline{x + \bar{y} + z}$
0	0	0	0	1	0
0	0	1	0	1	0
0	1	0	0	0	1
0	1	1	0	1	0
1	0	0	0	1	0
1	0	1	0	1	0
1	1	0	1	1	1
1	1	1	0	1	0

Aufgabe 1 – Darstellung von SF

- Füllen von Symmetriediagrammen anhand von Tabellen

Ein Symmetriediagramm beschreibt pro Zelle eine Wahrheitsbelegung unter Berücksichtigung aller Komponenten einer Funktion. Hier: (a, b, c, d).



Jede gelbe Linie an den Seiten definiert in den jeweiligen Zeilen bzw. Spalten die nicht negierte Form der jeweiligen Variable.

Alle anderen Zellen nehmen die negierte Form dieser Variablen an.

Diese Belegung ist im gelben Bereich von a, b, sowie c und nicht im Bereich von d: Zelle beschreibt: $abcd\bar{d}$

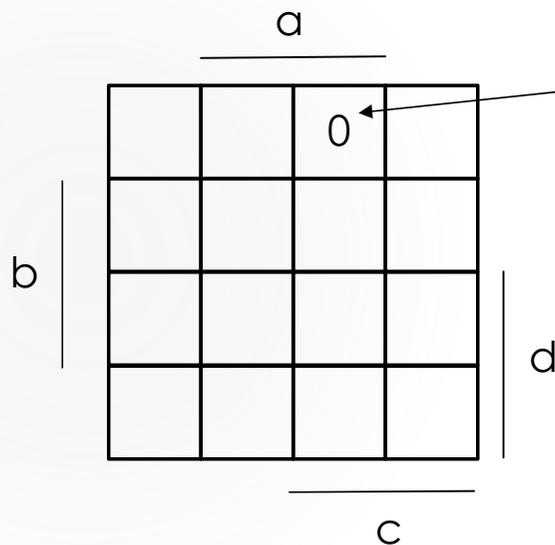
Aufgabe 1 – Darstellung von SF

- Füllen von Symmetriediagrammen anhand von Tabellen

Variante 1:

- 1: Lesen der Belegung der Komponenten der Funktion aus der Tabelle

$$A = 1, B = 0, C = 1, D = 0 \rightarrow A\bar{B}C\bar{D}$$



2: Eintragen des zugehörigen Funktionswertes

$$y_1(x) = 0$$

Aufgabe 1 – Darstellung von SF

- Füllen von Symmetriediagrammen anhand von Tabellen

Variante 2:

Jede Zelle eines Symmetriediagramms wird durch eine eindeutige Oktalzahl

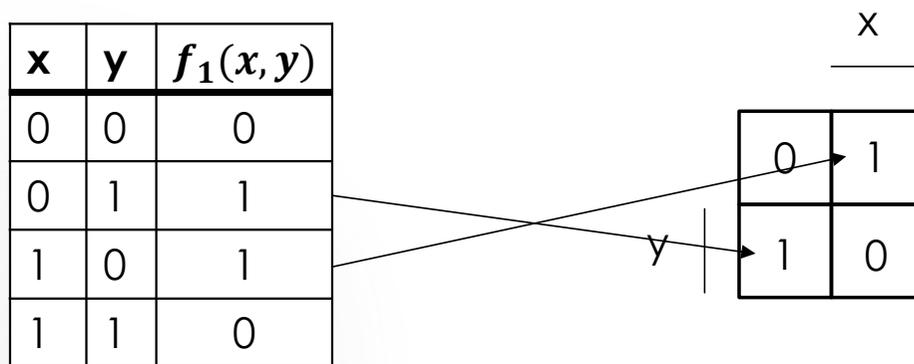
beschrieben. Diese wird am unteren rechten Rand vermerkt. Ist die Oktalzahl in der Tabelle gegeben, so kann der Funktionswert einfach in die korrespondierende Zelle eingetragen werden.

	a				
	0	1	5	4	
	2	3	7	6	
b	12	13	17	16	d
	10	11	15	14	
	c				

Aus Übersichtlichkeitsgründen werde ich auf die Durchnummerierung manchmal verzichten! Trotzdem ist es hilfreich sich diese zu vermerken.

Aufgabe 1 – Darstellung von SF

- Symmetriediagramm von $f_1(x, y) = x \oplus y$



Aufgabe 1 – Darstellung von SF

- Symmetriediagramm von $f_2(x, y, z) = (x + y)z$

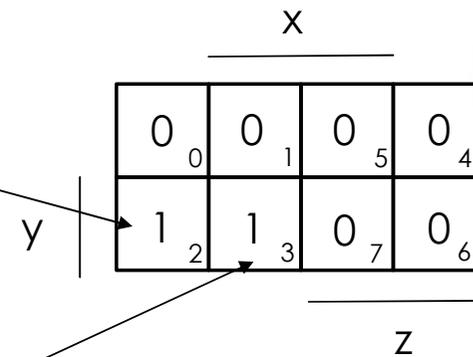
Oktal	z	y	x	$(x + y)z$
0	0	0	0	0
1	0	0	1	0
2	0	1	0	0
3	0	1	1	0
4	1	0	0	0
5	1	0	1	1
6	1	1	0	1
7	1	1	1	1

		x			
		0	1	1	0
y	0	0 ₀	0 ₁	1 ₅	0 ₄
	1	0 ₂	0 ₃	1 ₇	1 ₆
		z			

Aufgabe 1 – Darstellung von SF

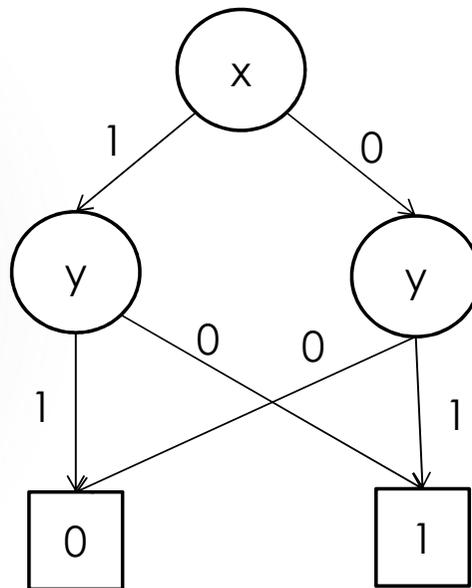
- Symmetriediagramm von $f_3 = xy\bar{z} + \overline{x + \bar{y} + z}$

x	y	z	$xy\bar{z} + \overline{x + \bar{y} + z}$
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	1
0	1	1	0
1	0	0	0
1	0	1	0
1	1	0	1
1	1	1	0



Aufgabe 1 – Darstellung von SF

- ▶ Binary Decision Diagrams (BDD)
- Grafische Darstellung von Funktionstabellen
- Erzeugung einer Baumstruktur mit Fallunterscheidung der Variablen
- Pfad von der Wurzel bis zur $\{0,1\}$ -Senke repräsentiert eine Ableitung mit Funktionswert $\{0,1\}$



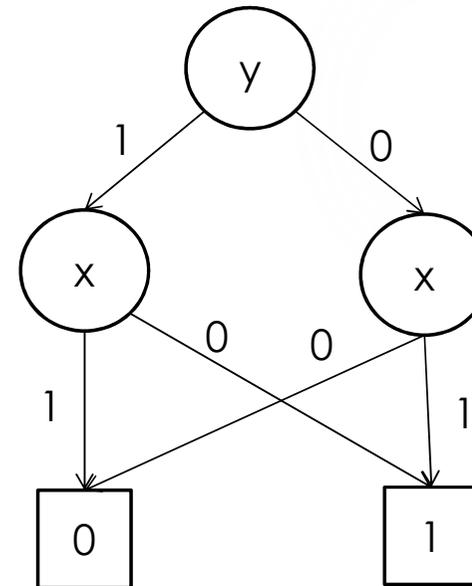
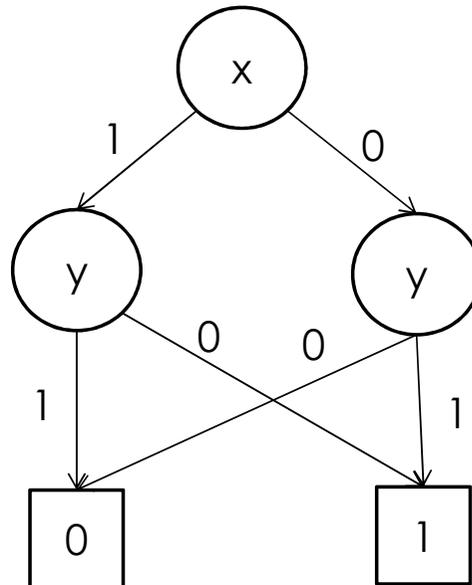
Aufgabe 1 – Darstellung von SF

- ▶ Binary Decision Diagrams (BDD)
 - Abhängig von der Reihenfolge der Variablen ergeben sich unterschiedliche BDDs
 - Deshalb: Ordered BDDs (OBDD) mit fester Variablenreihenfolge
 - Sinn von OBDDs:
 - Kanonische (d.h. eindeutige) Darstellung von Funktionen
 - Äquivalenzprüfung von Funktionen (z.B. vor und nach der Minimierung)
 - Effiziente rechnergestützte Verarbeitung

Aufgabe 1 – Darstellung von SF

- ▶ BDD von $f_1(x, y) = x \oplus y$

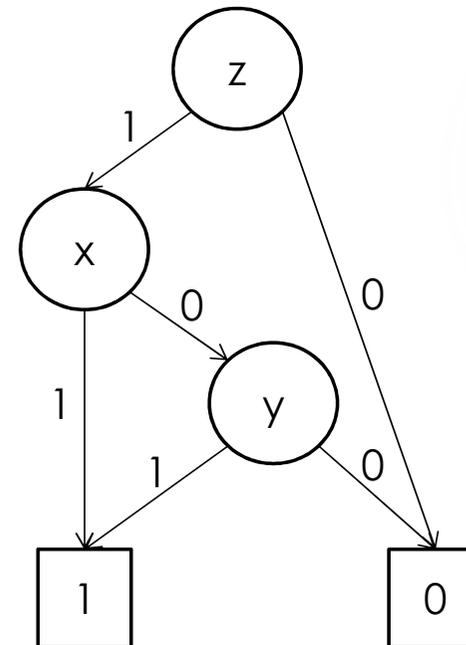
x	y	$f_1(x, y)$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	0



Aufgabe 1 – Darstellung von SF

- BDD von $f_2(x, y, z) = (x + y)z$

x	y	z	$(x + y)z$
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	1
1	1	0	0
1	1	1	1



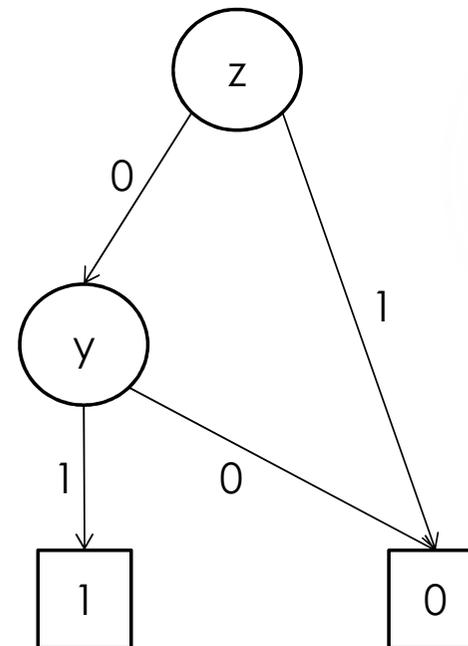
Aufgabe 1 – Darstellung von SF

► BDD von $f_3 = xy\bar{z} + \overline{x + \bar{y} + z}$

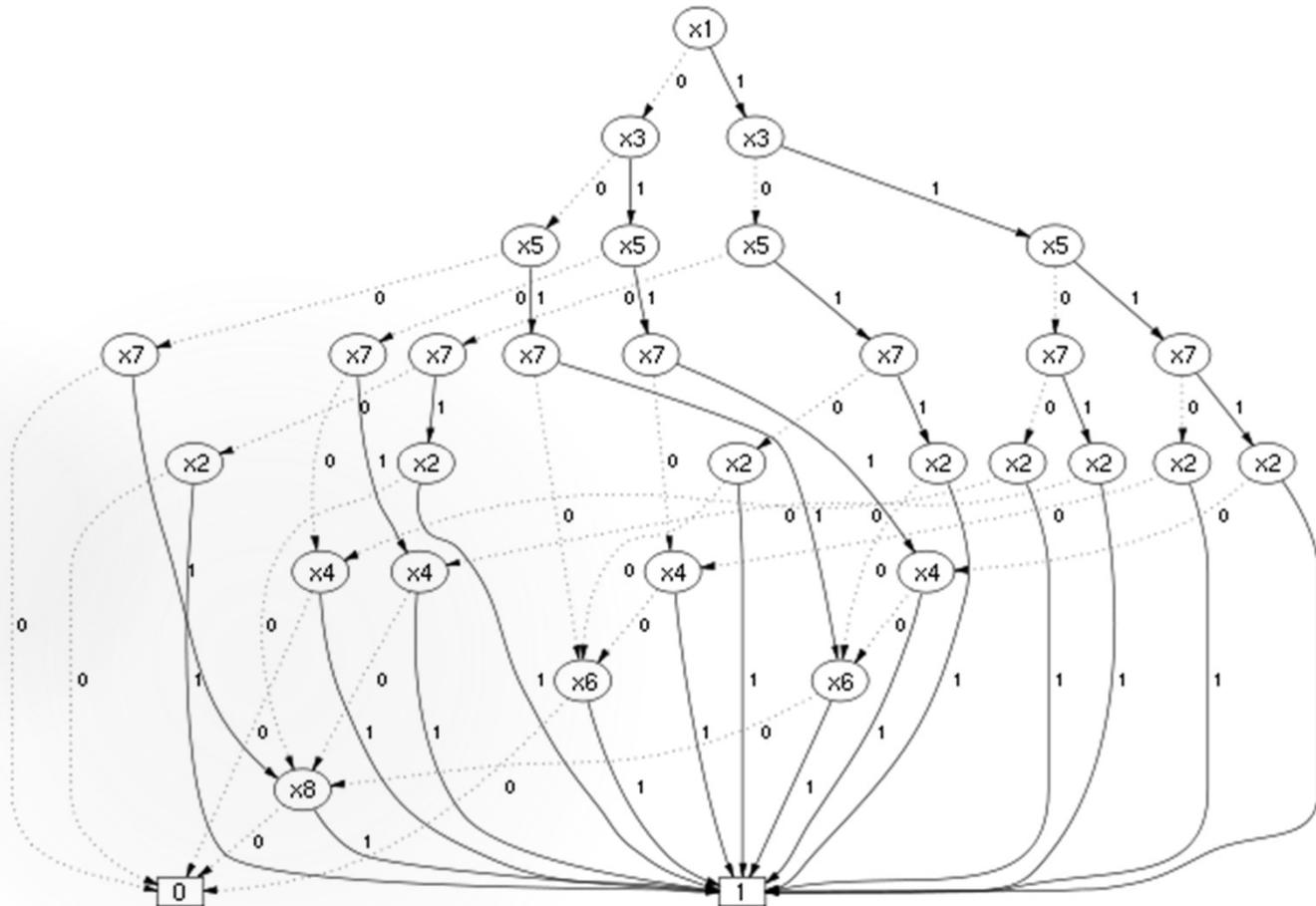
Reihenfolge bedeutend! Zuerst z, da im Fall $z = 1$

Sofort eine 0 eingetragen werden kann.

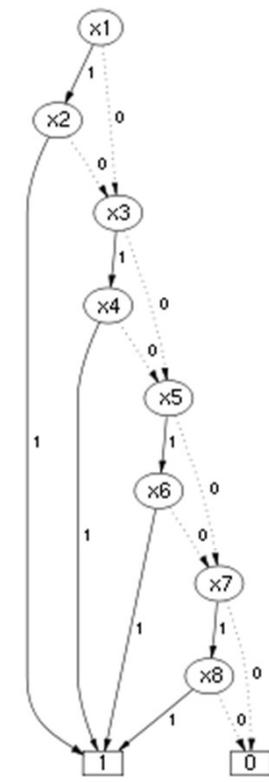
x	y	z	$xy\bar{z} + \overline{x + \bar{y} + z}$
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	1
0	1	1	0
1	0	0	0
1	0	1	0
1	1	0	1
1	1	1	0



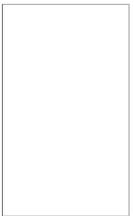
BDD: Reihenfolge wichtig



\cong



https://en.wikipedia.org/wiki/Binary_decision_diagram



Denkpause

Aufgabe:

In einem Eisenbahnabteil sitzen 10 intelligente Menschen. Es gibt keinen Spiegel und diese Menschen reden nicht miteinander. Als der Schaffner kommt sagt dieser: "Mindestens zwei von euch sind im Gesicht dreckig. Alle Dreckigen, sollten möglichst bald aussteigen und sich waschen."

Der Zug hält am ersten Bahnhof - keiner steigt aus. Das gleiche passiert am zweiten, dritten und vierten Bahnhof. Erst am fünften Bahnhof steigen alle aus, die Dreck im Gesicht haben.

Wie viele Menschen hatten Dreck im Gesicht und woher wussten diese, dass sie dreckig sind?

<http://www.logisch-gedacht.de/logikraetsel/eisenbahn/>



Denkpause

Lösung:



Angenommen, es hätten nur zwei der Personen Dreck im Gesicht gehabt, so hätte jeder der beiden Dreckigen nur einen anderen Dreckigen gesehen. Sie hätten also beide wissen können, dass sie dreckig sind. Folglich wären sie am ersten Bahnhof ausgestiegen.

Da niemand ausgestiegen ist mussten also mindestens drei Personen dreckig sein. Wären es drei gewesen, dann hätte jeder der drei Dreckigen zwei andere Dreckige gesehen und dadurch gewusst, dass er ebenfalls dreckig sein muss. Also wären alle Dreckigen am zweiten Bahnhof ausgestiegen.

Das gleiche Prinzip gilt auch an den folgenden Bahnhöfen: $(n+1)$ Personen wissen, dass sie dreckig sind, wenn bis zum $(n-1)$ ten Bahnhof niemand ausgestiegen ist. Sie steigen dann am n . Bahnhof aus.

Da alle Dreckigen am fünften Bahnhof ausgestiegen sind, müssen also sechs dreckige Personen im Eisenbahnabteil gewesen sein.

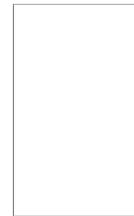
Aufgabe 1 – Darstellung von SF



- ▶ Logikgatter
 - Grafische Visualisierung von Schaltfunktionen durch Gatterblöcke
 - Jeder Block besitzt eine gewisse Anzahl von Eingangsvariablen, wendet auf diese eine Funktion an (z.B. UND) und legt anschließend den Funktionswert auf den Ausgang
 - Beispiel: $z = f(x, y) = x \wedge y$

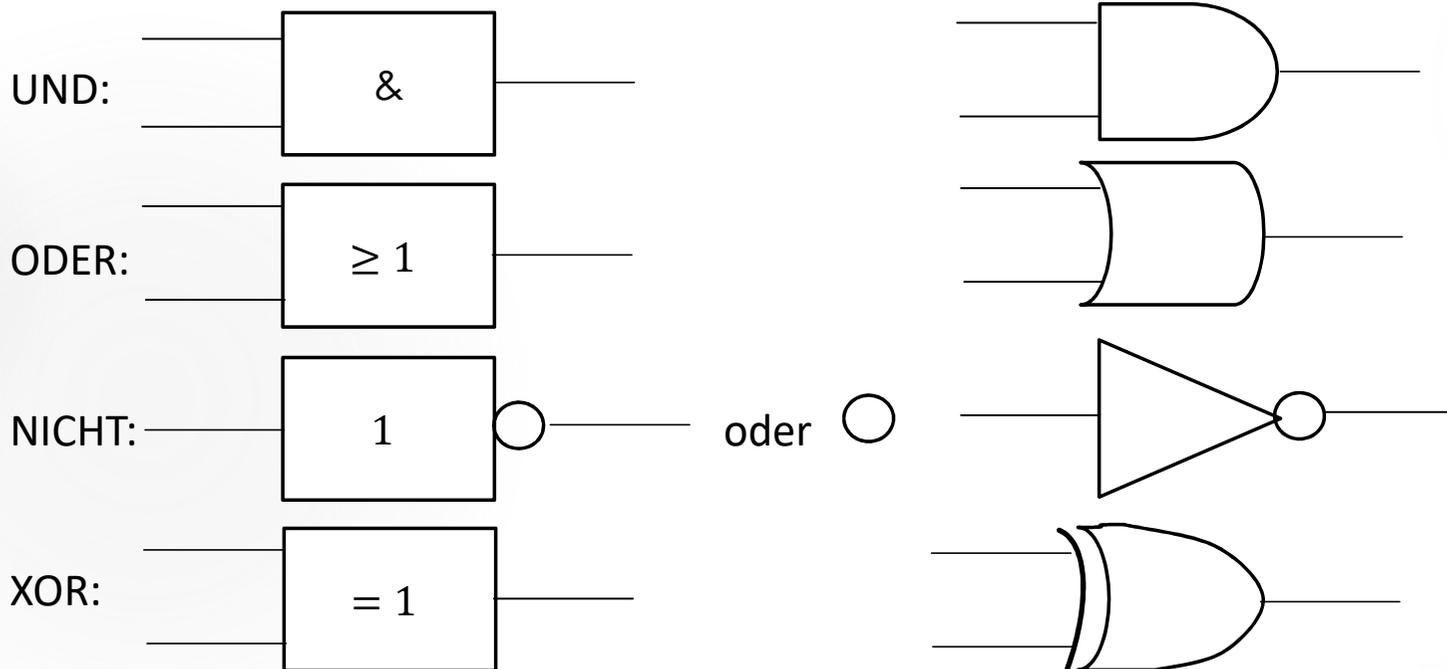


Aufgabe 1 – Darstellung von SF



Darstellung aussagenlogischer Verknüpfungen durch Logikgatter:

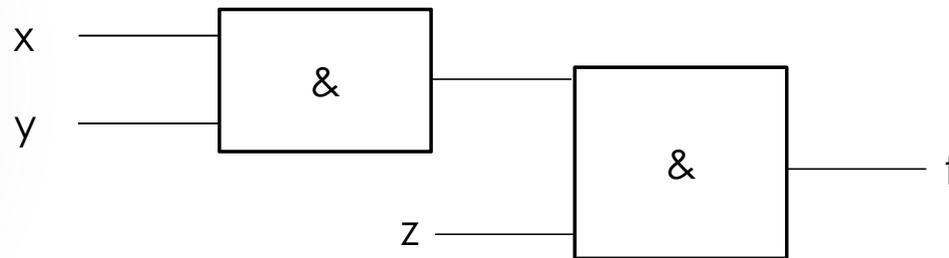
Für UND, ODER, sowie XOR existieren auch Varianten mit mehreren Eingängen



Aufgabe 1 – Darstellung von SF

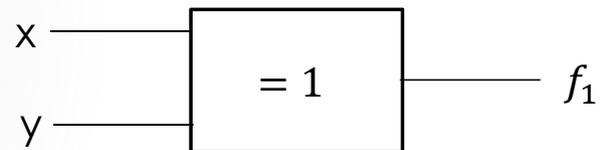
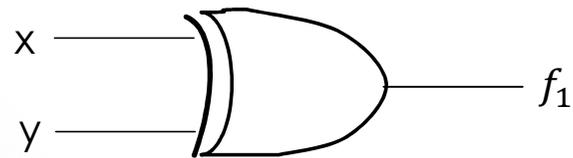


- ▶ Gatterschaltnetz
 - Umsetzung von komplexen Logikfunktionen, die aus elementaren Logikfunktionen (wie UND, ODER, NOR, ...) zusammengesetzt sind, möglich
 - Gatter können miteinander verschaltet werden, so dass der Ausgang des einen Gatters in den Eingang des nächsten Gatters geleitet wird



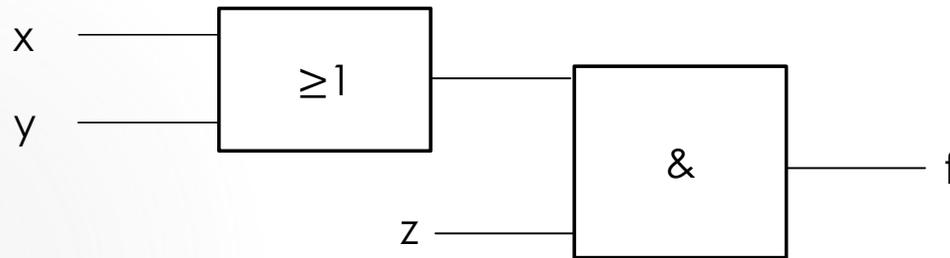
Aufgabe 1 – Darstellung von SF

- ▶ Gatterschaltnetz von $f_1(x, y) = x \oplus y$



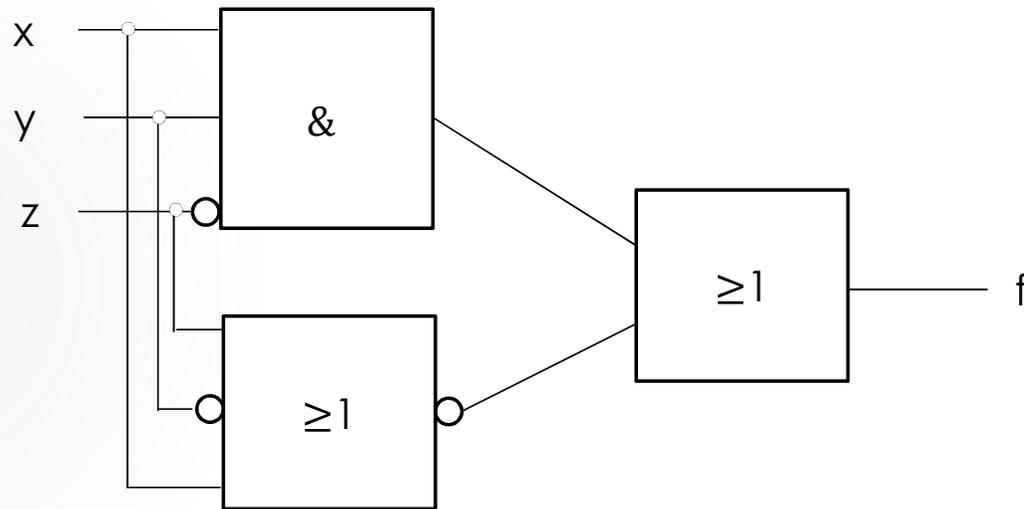
Aufgabe 1 – Darstellung von SF

- ▶ Gatterschaltnetz von $f_2(x, y, z) = (x + y)z$



Aufgabe 1 – Darstellung von SF

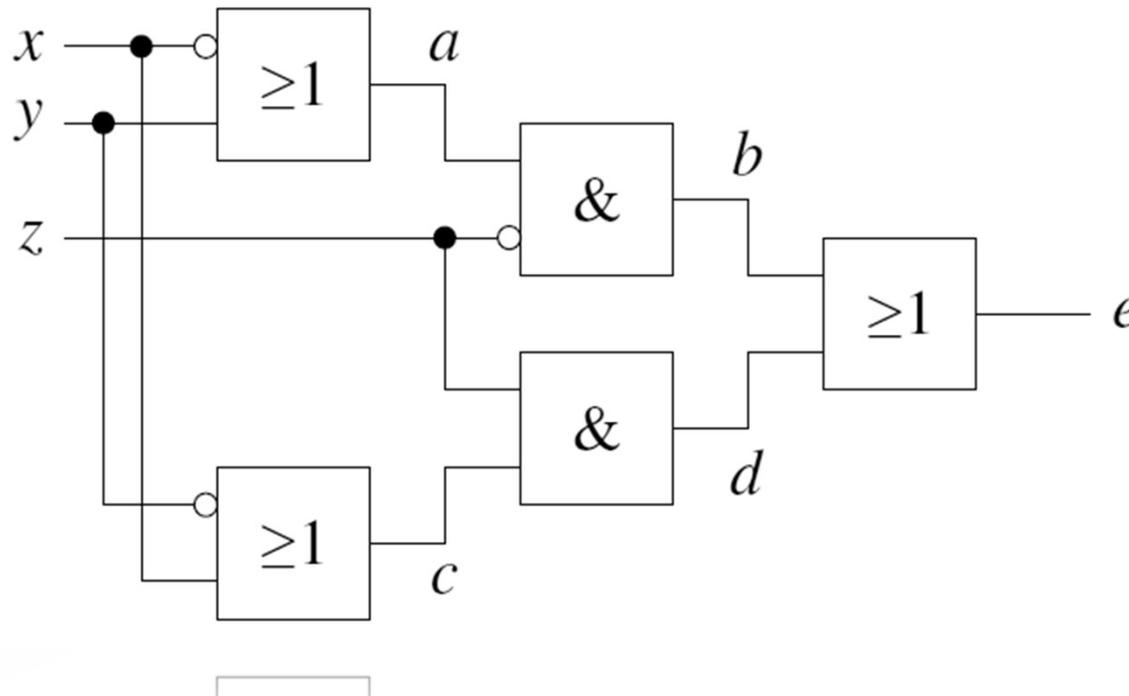
- ▶ Gatterschaltnetz von $f_3 = xy\bar{z} + \overline{x + \bar{y} + z}$



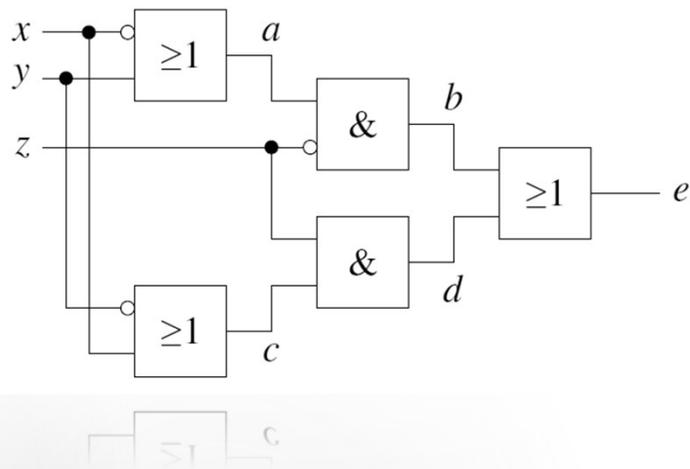
Aufgabe 1 – Darstellung von SF

- Geben Sie einen schaltalgebraischen Ausdruck für die Funktion der folgenden Komposition von Elementargattern an:

Hinweis: Zuerst a und c aufstellen, dann b und d ableiten und zu e komponieren



Aufgabe 1 – Darstellung von SF



$$a = \bar{x} + y$$
$$c = \bar{y} + x$$

$$b = a\bar{z} = (\bar{x} + y)\bar{z}$$
$$d = cz = (\bar{y} + x)z$$

$$e = b + d = (\bar{x} + y)\bar{z} + (\bar{y} + x)z$$
$$= \bar{x}\bar{z} + y\bar{z} + \bar{y}z + xz$$

Mittels eines Symmetriediagramms (später!) ergeben sich zwei gleichwertige Lösungen.

Aufgabe 1 – Darstellung von SF

Begriffsklärung:

Minterm (Vollkonjunktion):

- Reine Konjunktion aller existierenden Literale in negierter bzw. nicht negierter Form (d.h. alle Komponenten der Funktion kommen vor)
- Merkhilfe: minimale Anzahl an Einsern in Ergebnistabelle
- Seien also z.B. die Literale x , y und z Komponenten von $f(x, y, z)$:
 - $x \cdot \bar{y} \cdot \bar{z}$ bzw. $x \cdot y \cdot \bar{z}$ sind Minterme
 - $x \cdot \bar{z}$ bzw. $x + y \cdot \bar{z}$ sind keine Minterme

Disjunktive Normalform (DNF):

- Disjunktion (d.h. Veroderung) aller Minterme (!)
- Beispiel: $(x \cdot \bar{y} \cdot \bar{z}) + (x \cdot y \cdot \bar{z}) + \dots$

Aufgabe 1 – Darstellung von SF

Begriffsklärung:

Maxterm (Volldisjunktion):

- Reine Disjunktion aller existierenden Literale in negierter bzw. nicht negierter Form (d.h. alle Komponenten der Funktion kommen vor)
- Merkhilfe: maximale Anzahl an Einsern in Ergebnistabelle
- Seien also z.B. die Literale x , y und z Komponenten von $f(x, y, z)$:
 - $x + \bar{y} + \bar{z}$ bzw. $x + y + \bar{z}$ sind Maxterme
 - $x + \bar{z}$ bzw. $x + y \cdot \bar{z}$ sind keine Maxterme

Konjunktive Normalform (KNF):

- Konjunktion aller Maxterme (!)
- Beispiel: $(x + \bar{y} + \bar{z}) \cdot (x + y + \bar{z}) \cdot \dots$

Aufgabe 1 – Darstellung von SF

- ▶ Geben Sie für die in folgender Funktionstabelle beschriebene Schaltfunktion $f_5(x_3, x_2, x_1, x_0)$ sowohl eine disjunktive als auch eine konjunktive Normalform an:

$x_3x_2x_1x_0$	f_5	$x_3x_2x_1x_0$	f_5	$x_3x_2x_1x_0$	f_5	$x_3x_2x_1x_0$	f_5
0 0 0 0	1	0 1 0 0	0	1 0 0 0	0	1 1 0 0	1
0 0 0 1	0	0 1 0 1	1	1 0 0 1	1	1 1 0 1	0
0 0 1 0	0	0 1 1 0	1	1 0 1 0	1	1 1 1 0	0
0 0 1 1	1	0 1 1 1	0	1 0 1 1	0	1 1 1 1	1

Aufgabe 1 – Darstellung von SF

- Disjunktive Normalform

Minterm für jede Einsstelle und alle verodert

$$DNF(f_5) = \overline{x_3} \overline{x_2} \overline{x_1} \overline{x_0} + \overline{x_3} \overline{x_2} x_1 x_0 + \overline{x_3} x_2 x_1 \overline{x_0} + \overline{x_3} x_2 \overline{x_1} x_0 \\ + x_3 \overline{x_2} \overline{x_1} x_0 + x_3 \overline{x_2} x_1 \overline{x_0} + x_3 x_2 \overline{x_1} \overline{x_0} + x_3 x_2 x_1 x_0$$

$x_3 x_2 x_1 x_0$	f_5						
0 0 0 0	1	0 1 0 0	0	1 0 0 0	0	1 1 0 0	1
0 0 0 1	0	0 1 0 1	1	1 0 0 1	1	1 1 0 1	0
0 0 1 0	0	0 1 1 0	1	1 0 1 0	1	1 1 1 0	0
0 0 1 1	1	0 1 1 1	0	1 0 1 1	0	1 1 1 1	1

Aufgabe 1 – Darstellung von SF

► Konjunktive Normalform

Maxterm für jede Nullerstelle (Werte negiert auslesen!!!)

$$KNF(f_5) = (x_3 + x_2 + x_1 + \bar{x}_0)(x_3 + x_2 + \bar{x}_1 + x_0)(x_3 + \bar{x}_2 + x_1 + x_0)(x_3 + \bar{x}_2 + \bar{x}_1 + \bar{x}_0)(\bar{x}_3 + x_2 + x_1 + x_0)(\bar{x}_3 + x_2 + \bar{x}_1 + \bar{x}_0)(\bar{x}_3 + \bar{x}_2 + x_1 + \bar{x}_0)(\bar{x}_3 + \bar{x}_2 + \bar{x}_1 + x_0)$$

$x_3x_2x_1x_0$	f_5	$x_3x_2x_1x_0$	f_5	$x_3x_2x_1x_0$	f_5	$x_3x_2x_1x_0$	f_5
0 0 0 0	1	0 1 0 0	0	1 0 0 0	0	1 1 0 0	1
0 0 0 1	0	0 1 0 1	1	1 0 0 1	1	1 1 0 1	0
0 0 1 0	0	0 1 1 0	1	1 0 1 0	1	1 1 1 0	0
0 0 1 1	1	0 1 1 1	0	1 0 1 1	0	1 1 1 1	1

Aufgabe 1 – Darstellung von SF

- Geben Sie für die in folgendem Symmetriediagramm beschriebene Schaltfunktion $f_6(x_3, x_2, x_1, x_0)$ sowohl eine disjunktive als auch eine konjunktive Normalform an:

	x_0				
	1 0	0 1	0 5	1 4	
x_1	0 2	1 3	1 7	0 6	x_3
	0 12	1 13	1 17	0 16	
	1 10	0 11	0 15	1 14	
	x_2				

Aufgabe 1 – Darstellung von SF

► Disjunktive Normalform

$$\begin{aligned} DNF(f_6) = & \overline{x_3} \overline{x_2} \overline{x_1} \overline{x_0} + \overline{x_3} \overline{x_2} x_1 x_0 + \\ & \overline{x_3} x_2 \overline{x_1} \overline{x_0} + \overline{x_3} x_2 x_1 x_0 + x_3 \overline{x_2} \overline{x_1} \overline{x_0} + \\ & x_3 \overline{x_2} x_1 x_0 + x_3 x_2 \overline{x_1} \overline{x_0} + x_3 x_2 x_1 x_0 \end{aligned}$$

	x_0				
	1	0	0	1	
	0	1	1	0	
	0	1	1	0	
	1	0	0	1	
					x_2
x_1					x_3

Aufgabe 1 – Darstellung von SF

► Konjunktive Normalform

$$KNF(f_6) = (x_3 + x_2 + x_1 + \bar{x}_0)$$

$$(x_3 + x_2 + \bar{x}_1 + x_0)(x_3 + \bar{x}_2 + x_1 + \bar{x}_0)$$

$$(x_3 + \bar{x}_2 + \bar{x}_1 + x_0)(\bar{x}_3 + x_2 + x_1 + \bar{x}_0)$$

$$(\bar{x}_3 + x_2 + \bar{x}_1 + x_0)(\bar{x}_3 + \bar{x}_2 + x_1 + \bar{x}_0)$$

$$(\bar{x}_3 + \bar{x}_2 + \bar{x}_1 + x_0)$$

	x_0				
	1 ₀	0 ₁	0 ₅	1 ₄	
	0 ₂	1 ₃	1 ₇	0 ₆	
x_1	0 ₁₂	1 ₁₃	1 ₁₇	0 ₁₆	
	1 ₁₀	0 ₁₁	0 ₁₅	1 ₁₄	
					x_3
					x_2

Trick: wie eine DNF auslesen und dann alle Literale negieren!

Aufgabe 2 - Logik

- ▶ Fünf ehemalige Zuschauer eines Fußballturniers haben versucht, sich an die damalige Rangliste zu erinnern und machten dabei die folgenden Aussagen:
 - Mannschaft A hatte den 2. Platz und Mannschaft B den 5.
 - Mannschaft C hatte den 2. Platz und Mannschaft D den 3.
 - Mannschaft F hatte den 1. Platz und Mannschaft B den 3.
 - Mannschaft A hatte den 3. Platz und Mannschaft E den 6.
 - Mannschaft C hatte den 3. Platz und Mannschaft E den 4.
- ▶ Später stellte sich heraus, dass jeder Zuschauer sich in einer seiner beiden Aussagen geirrt hatte.
- ▶ Rekonstruieren Sie die richtige Platzverteilung.

Aufgabe 2 - Logik

1: Kurzdarstellung der Aussagen

1. $A = 2$; $B = 5$
2. $C = 2$; $D = 3$
3. $F = 1$; $B = 3$
4. $A = 3$; $E = 6$
5. $C = 3$; $E = 4$

Jeweils eine Aussage richtig, die andere falsch!

Aufgabe 2 - Logik

2: Abhängigkeiten skizzieren

1. $A = 2$; $B = 5$

2. $C = 2$; $D = 3$

3. $F = 1$; $B = 3$

4. $A = 3$; $E = 6$

5. $C = 3$; $E = 4$

Jeweils eine Aussage richtig, die andere falsch!

3: Konzentriert beobachten:

2 und 5 haben eine doppelte Abhängigkeit:

Sei $C = 3$, dann ist nämlich weder $C = 2$, noch $D = 3$ möglich.

Somit ist $E = 4$ korrekt!

Aufgabe 2 - Logik

4: Durchpropagieren

1. $A = 2; \quad B = 5$

2. $C = 2; \quad D = 3$

3. $F = 1; \quad B = 3$

4. $A = 3; \quad E = 6$

5. $C = 3; \quad E = 4$

Jeweils eine Aussage richtig, die andere falsch!

$$(5) E = 4 \rightarrow (4) A = 3 \rightarrow (1) B = 5 \rightarrow (3) F = 1 \rightarrow (2) C = 2$$

\rightarrow Exklusionsprinzip $D = 6$

Aufgabe 2 - Logik

Rangliste

- 1: G
- 2: C
- 3: A
- 4: E
- 5: B
- 6: D

Vielen Dank für eure
Aufmerksamkeit!

„聞くは一時の恥聞かぬは末代の恥“

„猿も木から落ちる“