

# GTI – ÜBUNG 6

NORMALFORM, MINIMALFORM UND DER ENTWICKLUNGSSATZ

# Aufgabe 1 - Boolesche Algebra

2

- ▶ Beweisen oder widerlegen Sie die folgenden Aussagen, ohne Wahrheitstabellen zu verwenden. Für Aussagen, die nicht wahr sind, geben Sie ein Gegenbeispiel an.
- ▶ Für Aussagen die wahr sind, geben Sie die entsprechenden Regeln an, mit welchen die Eigenschaft bewiesen werden kann.

# Aufgabe 1 - Boolesche Algebra

Begriffsklärung:

## Boolesche Algebra:

- Spezielle algebraische Struktur auf Basis der vorgestellten Operatoren UND, ODER, sowie der Negation

- Wichtige Gesetze:

- Kommutativgesetz:  $(A \cdot B) = (B \cdot A)$   $(A + B) = (B + A)$
- Assoziativgesetz:  $(A \cdot B) \cdot C = A \cdot (B \cdot C)$   $(A + B) + C = A + (B + C)$
- Distributivgesetz:  $(A + B) \cdot C = A \cdot C + B \cdot C$   $(A \cdot B) + C = (A + C) \cdot (B + C)$
- De Morgan:  $\overline{(A \cdot B)} = \bar{A} + \bar{B}$   $\overline{(A + B)} = \bar{A} \cdot \bar{B}$

# Aufgabe 1 - Boolesche Algebra

► Weitere Regeln für die Vereinfachung der Ausdrücke

○ Wichtige Gesetze:

- XOR:  $A \oplus B = (A \cdot \bar{B}) + (\bar{A} \cdot B)$
- Idempotenz:  $(A + A) = A$   $(A \cdot A) = A$
- Absorption:  $A \cdot (A + B) = A$   $A + (A \cdot B) = A$
- Consensus:  $(A \cdot B) + (\bar{A} \cdot C) + (B \cdot C) = (A \cdot B) + (\bar{A} \cdot C)$   
 $(A + B) \cdot (\bar{A} + C) \cdot (B + C) = (A + B) \cdot (\bar{A} + C)$

Von all diesen Gesetzen gibt es auch den multivaribablen Fall, der aber analog zu behandeln ist. Vor allem der Consensus ist nicht immer einfach zu entdecken.

Tipp: häufig, wenn man nicht weiter kommt, gilt der Consensus 😊

# Aufgabe 1 - Boolesche Algebra

5

▶  $\bar{x} \oplus (x + y) = x + \bar{y}$

Hinweis: XOR kann durch elementare Aussagenlogik wiedergegeben werden

# Aufgabe 1 - Boolesche Algebra

6

►  $\bar{x} \oplus (x + y) = x + \bar{y}$

$\bar{x} \oplus (x + y)$	Nutzen der Definition von XOR $((A \cdot \bar{B}) + (\bar{A} \cdot B))$
$= \bar{x} \cdot \overline{(x + y)} + x \cdot (x + y)$	Nutzen der Absorptionsregel
$= \bar{x} \cdot \overline{(x + y)} + x$	Nutzen von De Morgan
$= \bar{x} \cdot \bar{x} \cdot \bar{y} + x$	Idempotenz
$= \bar{x} \cdot \bar{y} + x$	Jetzt kommt ein doppelter Negationstrick
$= \overline{\overline{\bar{x} \cdot \bar{y} + x}}$	2 x De Morgan
$= \overline{(x + y) \cdot \bar{x}}$	Distributivgesetz
$= \overline{(x \cdot \bar{x} + y \cdot \bar{x})}$	$x \cdot \bar{x}$ ist immer falsch, dann De Morgan
$= \overline{(y \cdot \bar{x})} = x + \bar{y} \rightarrow \text{ok!}$	

# Aufgabe 1 - Boolesche Algebra

7

▶  $(x + y)(x + y \cdot z) = (x + y \cdot z)$

Hinweis: Weiß reflektiert das sichtbare Spektrum des Lichts zur Gänze, während die Farbe Schwarz ...

# Aufgabe 1 - Boolesche Algebra

►  $(x + y)(x + y \cdot z) = (x + y \cdot z)$

Hier greift eine Variante der **Absorptionsregel**, da  $(x + y \cdot z) \geq (x + y)$

Sprich  $(x + y \cdot z)$  ist eine **stärkere** Bedingung als  $(x + y)$

Man kann auch sagen, dass  $(x + y)$  ein **Spezialfall** von  $(x + y \cdot z)$  ist.

Nämlich der Fall das  $z = 1$ .

Es muss beides erfüllt sein!

X	Y	Z	$(x + y)$	$(x + y \cdot z)$
0	0	0	0	0
0	0	1	0	0
0	1	0	1	0
0	1	1	1	1
1	0	0	1	1
1	0	1	1	1
1	1	0	1	1
1	1	1	1	1

# Aufgabe 1 - Boolesche Algebra

►  $ab + \bar{b}c\bar{d} + ac\bar{d} = ab + \bar{b}c\bar{d}$

Hinweis: Zustimmung bzw. Mitgefühl sind hier gefragt

# Aufgabe 1 - Boolesche Algebra

10

►  $ab + \bar{b}c\bar{d} + ac\bar{d} = ab + \bar{b}c\bar{d}$

Dies ist ein klassischer Fall des **Consensus**.

Voraussetzung sind zwei Ausdrücke, die dasselbe Literal besitzen, wobei ein Ausdruck es in negierter und der andere in nicht negierter Version aufweist.

Hier:  $ab$ ,  $\bar{b}c\bar{d}$  teilen sich das Literal  $b$

Zudem muss der dritte Ausdruck Komposition der beiden vorherigen Ausdrücke sein exklusive des geteilten Literals.

Hier:  $ab$ ,  $\bar{b}c\bar{d}$  ohne das Literal  $b$  ergibt  $a$ ,  $c\bar{d}$ .

Komponiert  $ac\bar{d}$ , welches tatsächlich existiert und somit wegfällt.

# Aufgabe 1 - Boolesche Algebra

11

▶  $xy + x(y + z) = x(y + z)$

Hinweis: zwei Regeln führen hier zum Erfolg

# Aufgabe 1 - Boolesche Algebra

12

►  $xy + x(y + z) = x(y + z)$

$xy + x(y + z)$  | Distributivgesetz

$= xy + xy + xz$  | Idempotenz

$= xy + xz$  | Distributivgesetz

$= x(y + z)$

# Aufgabe 1 - Boolesche Algebra

13

▶  $ab + \bar{b}c\bar{d} + ac\bar{d} = ab + c\bar{d}$

Hinweis: warum so viel Begleittext, wenn alle Ausdrücke richtig wären?  
der obige Ausdruck sollte einem bekannt vorkommen

# Aufgabe 1 - Boolesche Algebra

14

►  $ab + \bar{b}c\bar{d} + ac\bar{d} = ab + c\bar{d}$

Wir hatten durch Consensus in Aufgabe c bewiesen:

$$ab + \bar{b}c\bar{d} + ac\bar{d} = ab + \bar{b}c\bar{d}$$

Wir können nun also schreiben:

$$ab + \bar{b}c\bar{d} = ab + c\bar{d}$$

| Wir „subtrahieren“  $ab$

$$\bar{b}c\bar{d} = c\bar{d}$$

| Wir „dividieren“  $c\bar{d}$

$$\bar{b} = 1$$

Was wir nicht wirklich schlussfolgern können. Also ist dieser Ausdruck **nicht wahr!**

# Aufgabe 2 – DNF, SOP, POS

15

## Beschreibung

- ▶ Bestimmen Sie die disjunktive Normalform (DNF) der folgenden Funktionen:

a,  $f(x, y, z) = xyz + \bar{x}y + \bar{y}z$

b,  $f(x, y, z) = xy + \bar{x}\bar{y}z + x\bar{y}\bar{z}$

# Aufgabe 2 – DNF, SOP, POS

16

Begriffsklärung:

## Minterm (Vollkonjunktion):

- Reine Konjunktion **aller** existierenden Literale in negierter bzw. nicht negierter Form (d.h. alle Komponenten der Funktion kommen vor)
- Merkhilfe: minimale Anzahl an Einsern in Ergebnistabelle
- Seien also z.B. die Literale  $x$ ,  $y$  und  $z$  Komponenten von  $f(x, y, z)$ :
  - $x \cdot \bar{y} \cdot \bar{z}$  **bzw.**  $x \cdot y \cdot \bar{z}$  sind Minterme
  - $x \cdot \bar{z}$  **bzw.**  $x + y \cdot \bar{z}$  sind keine Minterme

## Disjunktive Normalform (DNF):

- Disjunktion (d.h. Veroderung) aller **Minterme** (!)
- Beispiel:  $(x \cdot \bar{y} \cdot \bar{z}) + (x \cdot y \cdot \bar{z}) + \dots$

# Aufgabe 2 – DNF, SOP, POS

17

Begriffsklärung:

## Maxterm (Volldisjunktion):

- Reine Disjunktion **aller** existierenden Literale in negierter bzw. nicht negierter Form (d.h. alle Komponenten der Funktion kommen vor)
- Merkhilfe: maximale Anzahl an Einsern in Ergebnistabelle
- Seien also z.B. die Literale  $x$ ,  $y$  und  $z$  Komponenten von  $f(x, y, z)$ :
  - $x + \bar{y} + \bar{z}$  **bzw.**  $x + y + \bar{z}$  sind Maxterme
  - $x + \bar{z}$  **bzw.**  $x + y \cdot \bar{z}$  sind keine Maxterme

## Konjunktive Normalform (KNF):

- Konjunktion aller **Maxterme** (!)
- Beispiel:  $(x + \bar{y} + \bar{z}) \cdot (x + y + \bar{z}) \cdot \dots$

# Aufgabe 2 – DNF, SOP, POS

18

Begriffsklärung:

## Disjunktive Minimalform (DMF):

- Disjunktion mehrerer durch Konjunktion verknüpften Literale, die (ohne ihre Form zu verletzen) nicht weiter vereinfacht werden kann
- Folglich also das Resultat einer Vereinfachung einer DNF

## Konjunktive Minimalform (KNF):

- Konjunktion mehrerer durch Disjunktion verknüpften Literale, die (ohne ihre Form zu verletzen) nicht weiter vereinfacht werden kann
- Folglich also das Resultat einer Vereinfachung einer KNF

**Achtung:** in der Literatur wird diese Minimalform oft auch als DNF/KNF angesehen

# Aufgabe 2 – DNF, SOP, POS

19

DNF von  $f(x, y, z) = xyz + \bar{x}y + \bar{y}z$

Problem: keine DNF, da nicht nur Minterme vorliegen

Lösung: wir verwenden das Distributivgesetz:  $\bar{x}y = \bar{x}y(z + \bar{z}) = \bar{x}yz + \bar{x}y\bar{z}$

$$\begin{aligned} f(x, y, z) &= xyz + \bar{x}y + \bar{y}z \\ &= xyz + \bar{x}yz + \bar{x}y\bar{z} + x\bar{y}z + \bar{x}\bar{y}z \end{aligned}$$

# Aufgabe 2 – DNF, SOP, POS

20

DNF von  $f(x, y, z) = \underbrace{xy} + \bar{x}\bar{y}z + x\bar{y}\bar{z}$

Problem: keine DNF, da nicht nur Minterme vorliegen

Lösung: wir verwenden das Distributivgesetz:

$$\begin{aligned} f(x, y, z) &= xy + \bar{x}\bar{y}z + x\bar{y}\bar{z} \\ &= xyz + xy\bar{z} + \bar{x}\bar{y}z + x\bar{y}\bar{z} \end{aligned}$$

# Aufgabe 2 – DNF, SOP, POS

21

## Beschreibung

- ▶ Bestimmen Sie die primären Kosten (Kosten der UND-Verknüpfung) und sekundären Kosten (Kosten der ODER-Verknüpfung) der Funktionen aus i und ii sowie deren DNFs.
- ▶ Benutzen Sie als Kostenmaß die Anzahl der jeweils verknüpften Signale

# Aufgabe 2 – DNF, SOP, POS

Wir zählen einfach die Anzahl der durch UND bzw. ODER verknüpften Literale.

Primärkosten: Anzahl der durch UND verknüpften Literale

Sekundärkosten: Anzahl der durch ODER verknüpften Literale

Name	Funktionen	Primärkosten	Sekundärkosten	Gesamtkosten
$f_1$	$xyz + \bar{x}y + \bar{y}z$	7	3	10
$DNF_1$	$xyz + \bar{x}yz + \bar{x}y\bar{z}$ $+ x\bar{y}z + \bar{x}\bar{y}z$	15	5	20
$f_2$	$xy + \bar{x}\bar{y}z + x\bar{y}\bar{z}$	8	3	11
$DNF_2$	$xyz + xy\bar{z} + \bar{x}\bar{y}z + x\bar{y}\bar{z}$	12	4	16

# Aufgabe 2 – DNF, SOP, POS

23

- ▶ Konvertieren Sie die folgenden Funktionen von POS (Products Of Sums) nach SOP (Sums Of Products)
- ▶ Konvertieren Sie also von einer konjunktive Form (KF) auf eine disjunktive Form (DF) :

$$f(w, x, y, z) = (\bar{w} + z)(\bar{w} + x + y)(x + \bar{y} + z)$$

**Hinweis:** dieser Weg ist für viele intuitiver als NF zu KF. Wir nutzen das Distributivgesetz (aber in der „normalen“ Richtung)

# Aufgabe 2 – DNF, SOP, POS

24

POS nach SOP: Idempotenz bei der Auflösung des Distributivgesetzes nicht mehr explizit vermerkt

$$\begin{aligned} f(w, x, y, z) &= (\bar{w} + z)(\bar{w} + x + y)(x + \bar{y} + z) && | \text{Distributivgesetz} \\ &= (\bar{w} + z)[\bar{w}x + \bar{w}\bar{y} + \bar{w}z + x + x\bar{y} + xz + xy + y\bar{y} + yz] && | \text{Absorption} \\ &= (\bar{w} + z)[\bar{w}\bar{y} + \bar{w}z + x + y\bar{y} + yz] && | \text{Unerfüllbarkeit} \\ &= (\bar{w} + z)[\bar{w}\bar{y} + \bar{w}z + x + yz] && | \text{Consensus} \\ &= (\bar{w} + z)[\bar{w}\bar{y} + x + yz] && | \text{Distributivgesetz} \\ &= \bar{w}\bar{y} + \bar{w}x + \bar{w}yz + \bar{w}\bar{y}z + xz + yz && | \text{Absorption} \\ &= \bar{w}\bar{y} + \bar{w}x + xz + yz \end{aligned}$$

# Aufgabe 2 – DNF, SOP, POS

25

## Beschreibung

- ▶ Konvertieren Sie die folgenden Funktionen von SOP (Sums Of Products) nach POS (Products Of Sums).
- ▶ Konvertieren Sie also von einer Disjunktiven Form (DF) auf eine konjunktive Form (KF):
  - a,  $f(x, y, z) = xyz + \bar{x}y + \bar{y}z$
  - b,  $f(w, x, y, z) = wx + \bar{w}z + w\bar{y}\bar{z}$

# Aufgabe 2 – DNF, SOP, POS

26

## ► Rechenregeln für Konvertierung von SOP nach POS

Wir können uns für kleinere Fälle folgende Regeln herleiten:

Rechenregel 1:  $a + bc = (a+b)(a+c)$

Rechenregel 2:  $ab + cd = (a+c)(a+d)(b+c)(b+d)$

Rechenregel 3:  $ab + cde = (a+c)(a+d)(a+e)(b+c)(b+d)(b+e)$

Daraus sehen wir also die Rechenregel für den allgemeinen Fall:

$$(a_1b_1\dots) + (a_2b_2\dots) + (a_3b_3\dots) \dots$$

$$= (a_1 + a_2 + a_3 + \dots)(a_1 + a_2 + b_3 + \dots)(a_1 + b_2 + a_3 + \dots) \dots$$

D.h. wir bilden alle möglichen Permutationen, wobei wir deren Literale addieren und die Permutationen an sich multiplizieren.

Wir wenden ergo das Distributivgesetz auf die Formeln an!

# Aufgabe 2 – DNF, SOP, POS

27

Wir suchen  $f(x, y, z) = xyz + \bar{x}y + \bar{y}z$  in einer Form  $(\_ + \_ + \_) \cdot (\_ + \_ + \_) \cdot \dots$

Dazu versuchen wir die konjugierten Terme durch ein Produkt einer Disjunktion auszudrücken. Zuerst lohnt sich häufig eine Vereinfachung.

Rechenregel 1:  $a + bc = (a+b)(a+c)$  | Absorption von a, nur bc übrig

$$\begin{aligned} f(x, y, z) &= xyz + \bar{x}y + \bar{y}z && | \text{DNF} \\ &= xyz + \bar{x}yz + \bar{x}y\bar{z} + x\bar{y}z + \bar{x}\bar{y}z && | \text{Idempotenz} \\ &= \bar{x}yz + \bar{x}y\bar{z} + \color{red}{x\bar{y}z} + \color{red}{\bar{x}\bar{y}z} + \bar{x}yz + xyz && | \text{Distributivgesetz} \\ &= \bar{x}y + \bar{y}z + yz && | \text{Distributivgesetz} \\ &= \bar{x}y + z && | \text{Rechenregel 1} \\ &= (\bar{x} + z)(y + z) \end{aligned}$$

# Aufgabe 2 – DNF, SOP, POS

28

Wir suchen  $f(w, x, y, z) = wx + \bar{w}z + w\bar{y}\bar{z}$  in einer Form  $(\_ + \_ + \_) \cdot (\_ + \_ + \_) \cdot \dots$

Rechenregel 2:  $ab + cd = (a+c)(a+d)(b+c)(b+d)$

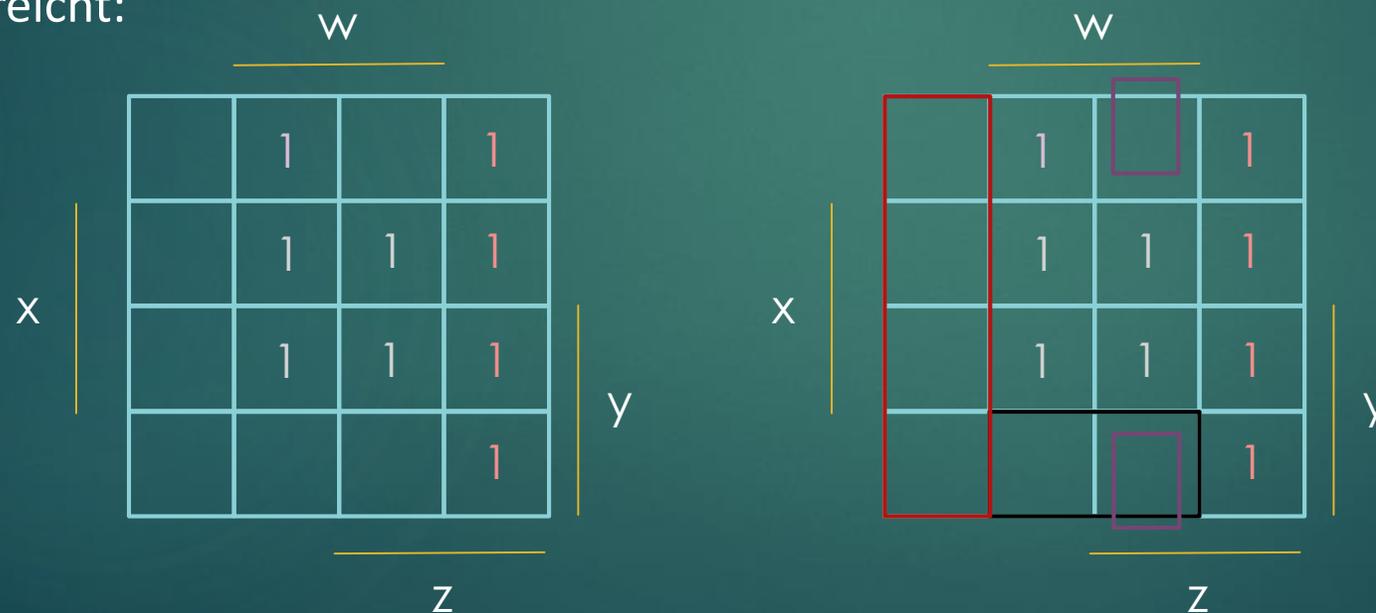
Rechenregel 3:  $ab + cde = (a+c)(a+d)(a+e)(b+c)(b+d)(b+e)$

$$\begin{aligned} f(w, x, y, z) &= wx + \bar{w}z + w\bar{y}\bar{z} && | \text{R2} \\ &= [(w + \bar{w})(w + z)(\bar{w} + x)(x + z)] + w\bar{y}\bar{z} && | \text{Tertium non datur} \\ &= [(w + z)(\bar{w} + x)(x + z)] + w\bar{y}\bar{z} && | \text{Consensus} \\ &= [(w + z)(\bar{w} + x)] + w\bar{y}\bar{z} && | \text{R3, dann IP und Absorption} \\ &= (w + w + z)(w + \bar{w} + x)(w + \bar{y} + z)(\bar{w} + x + \bar{y})(w + z + \bar{z})(\bar{w} + x + \bar{z}) \\ &= (w + z)(w + \bar{w} + x)(\bar{w} + x + \bar{y})(\bar{w} + x + \bar{z}) && | \text{Tertium non datur} \\ &= (w + z)(\bar{w} + x + \bar{y})(\bar{w} + x + \bar{z}) && \text{Es gibt weitere Lösungen!} \end{aligned}$$

# Aufgabe 2 – DNF, SOP, POS

Wir suchen  $f(w, x, y, z) = wx + \bar{w}z + w\bar{y}\bar{z}$  in einer Form  $(\_ + \_ + \_) \cdot (\_ + \_ + \_) \cdot \dots$

Das Verfahren der Multiplikation aller konjugierten Permutationen ist manchmal sehr aufwendig. Für die Umformung bieten sich deshalb **Symmetriediagramme** an, mit denen man sowohl schneller, leichter, als auch weniger fehleranfällig sein Ziel erreicht:



Diese Überdeckung entspricht:

$$(w + x) \cdot (\bar{w} + x + \bar{y}) \cdot (\bar{w} + x + \bar{z})$$

# Aufgabe 2 – DNF, SOP, POS

- ▶ Wie unterscheiden sich die technischen Realisierungen der beiden Formen?

Zur Erinnerung:

SOP (Sum of Products): z.B.  $\bar{w}\bar{y} + \bar{w}x + xz + yz$

POS (Product of Sums): z.B.  $(w + z)(\bar{w} + x + \bar{y})(\bar{w} + x + \bar{z})$

	Erste Ebene	Zweite Ebene
SOP – Form:	UND-Feld	ODER-Feld
POS – Form:	ODER-Feld	UND-Feld

Genauere Umsetzung mittels PAL, PLA wird später besprochen.

# Denkpause

31

- ▶ Ein Direktor einer Gefängnisanstalt macht seinen hundert Häftlingen ein Angebot. Es kommen alle frei, wenn sie folgende Aufgabe lösen können:
- ▶ Jeden Tag wird der Direktor einen Gefangenen aussuchen, der in einen Raum geführt wird, in dem sich nur eine Lampe befindet, die an- oder ausgeschaltet werden kann. Der Gefangene darf sich dort kurz aufhalten und nichts außer dem Zustand der Lampe verändern.
- ▶ Nach dem Aufenthalt darf die ausgewählte Person den Direktor ansprechen, wenn sie sicher ist, dass alle Gefangenen vor ihm auch in dem Raum gewesen sind
- ▶ Alle Gefangenen sind isoliert voneinander und dürfen sich nur einmalig vor der Aktion eine Stunde lang besprechen.

# Denkpause

32

Lösung:

Die Gefangenen legen in ihrer Unterredung einen Sträfling fest, der das Zählen übernimmt.

Jeder der Gefangene außer dem Zähler führt den folgenden Algorithmus aus:

Wenn die Lampe aus ist, schaltet er diese an, falls er zuvor noch nie die Lampe angeschaltet hat. Ansonsten lässt er die Lampe in ihrem Zustand.

Der Zähler führt den folgenden Algorithmus aus:

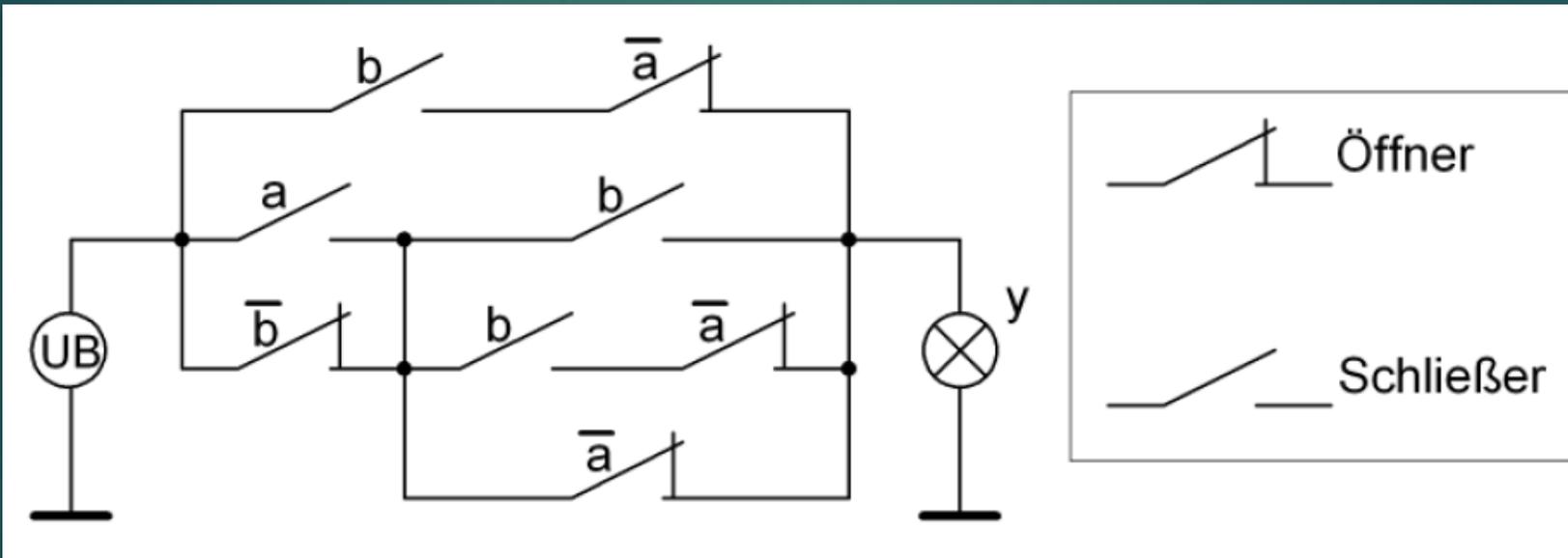
Ist die Lampe angeschaltet, weiß der Zähler, dass ein neuer Sträfling im Raum war, zählt eins hoch und schaltet die Lampe aus. Ist die Lampe ausgeschaltet, war in der Zwischenzeit kein neuer Gefangene im Raum, so dass er nicht hochzählt und die Lampe unverändert lässt.

Hat der Zähler bis 99 gezählt, kann er dem Direktor Bescheid geben.

# Aufgabe 3 – Relaisschaltnetz

33

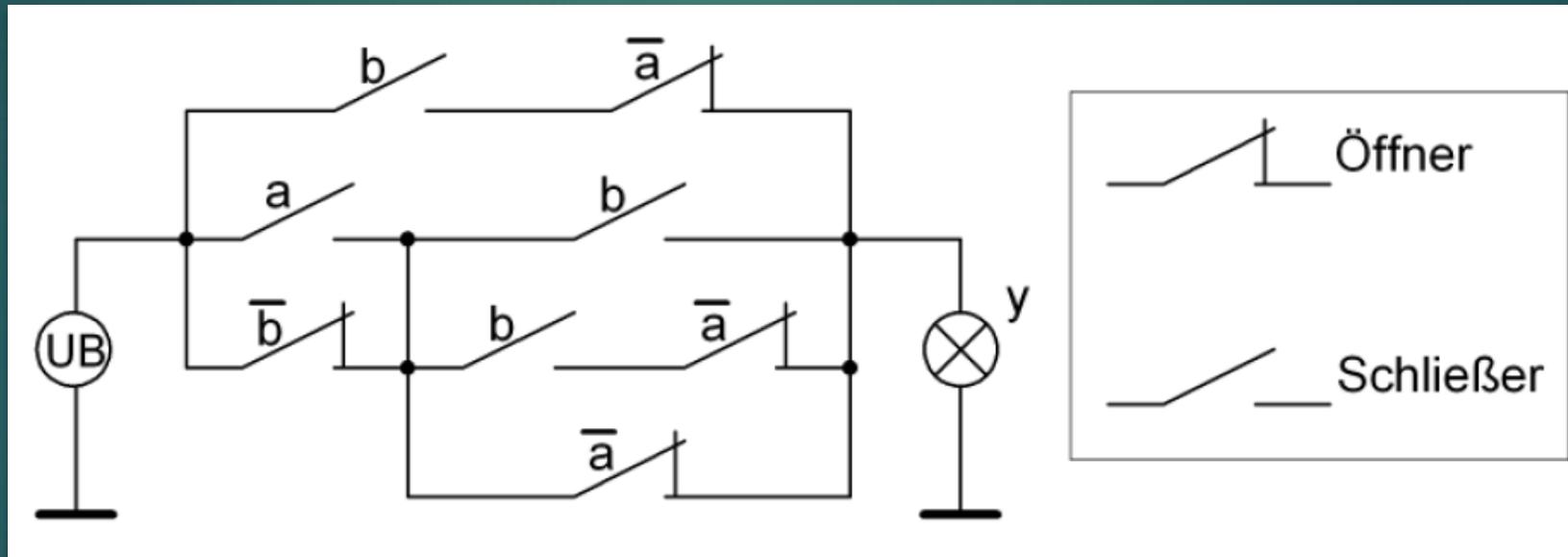
- ▶ Gegeben sei das im nachstehenden Bild dargestellte Relaisschaltnetz:



# Aufgabe 3 – Relaisschaltnetz

34

- ▶ Bilden Sie daraus den entsprechenden schaltalgebraischen Ausdruck und vereinfachen Sie ihn. Wie wird die realisierte Funktion bezeichnet?



# Aufgabe 3 – Relaisschaltnetz

35

Wir bilden das gegebene Schaltnetz auf Aussagenlogik ab. Dazu nutzen wir elementare Regeln:

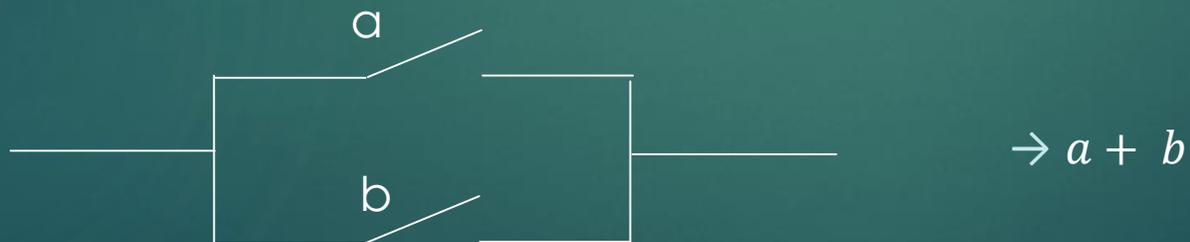
Serienschaltung  $\rightarrow$  Konjunktion

Beispiel:



Parallelschaltung  $\rightarrow$  Disjunktion

Beispiel:

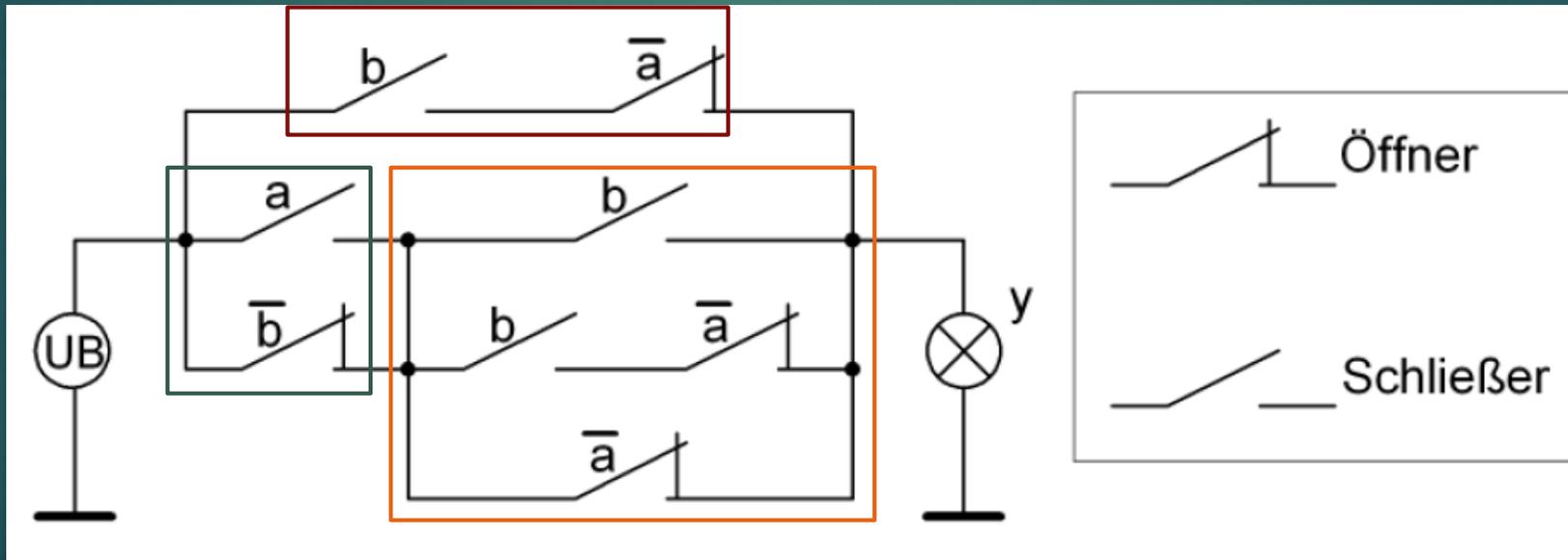


# Aufgabe 3 – Relaisschaltnetz

36

Anwendung der elementaren Regeln:

$$y = [((\bar{a} \cdot b) + \bar{a} + b)(a + \bar{b})] + (\bar{a} \cdot b)$$



# Aufgabe 3 – Relaisschaltnetz

37

Wir erhalten folgende aussagenlogische Form:

$$y = [((\bar{a} \cdot b) + \bar{a} + b)(a + \bar{b})] + (\bar{a} \cdot b)$$

$$= [(\bar{a} + b)(a + \bar{b})] + (\bar{a} \cdot b)$$

$$= [(\bar{a} \cdot a) + (a \cdot b) + (\bar{a} \cdot \bar{b}) + (\bar{b} \cdot b)] + (\bar{a} \cdot b)$$

$$= (\bar{a} \cdot a) + (a \cdot b) + (\bar{a} \cdot \bar{b}) + (\bar{b} \cdot b) + (\bar{a} \cdot b)$$

$$= (a \cdot b) + (\bar{a} \cdot \bar{b}) + (\bar{a} \cdot b)$$

$$= (a \cdot b) + (\bar{a} \cdot b) + (\bar{a} \cdot \bar{b}) + (\bar{a} \cdot b)$$

$$= b(a + \bar{a}) + \bar{a}(\bar{b} + b)$$

$$= b + \bar{a}$$

Dies ist die Auflösung der Implikation  $a \rightarrow b$

| Absorption

| Distributivgesetz

| Assoziativgesetz

| Unerfüllbare Literale

| Umgekehrte Idempotenz

| Distributivgesetz

| Tertium non datur

# Aufgabe 3 – Relaisschaltnetz

38

- ▶ Entwerfen Sie ein Relaisschaltnetz, das die negierte Konjunktion realisiert.

Hinweis: Umformen der Formel auf eine Darstellung ohne Negierung der Verknüpfung

# Aufgabe 3 – Relaisschaltnetz

39

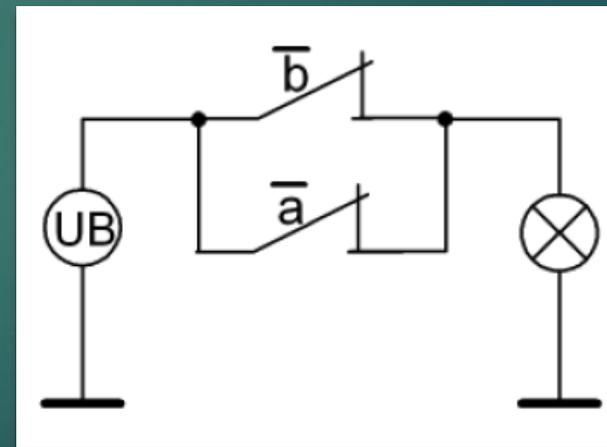
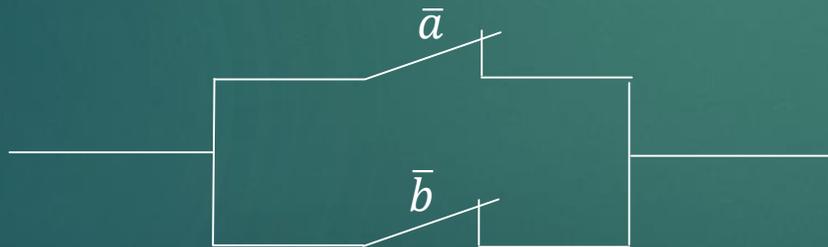
Die negierte Negation mit zwei Literalen a und b lässt sich folgendermaßen darstellen:

$$\overline{a \cdot b}$$

Wir benutzen dazu die Regel von De Morgan:

$$\overline{a \cdot b} = \bar{a} + \bar{b}$$

Darstellung durch eine Parallelschaltung:



# Aufgabe 4 – Entwicklungssatz

40

- ▶ Die gegebene Schaltfunktion  $y = f(a,b,c,d)$  soll mit Hilfe des **Entwicklungssatzes** entwickelt werden:

$$y = \bar{a}\bar{c} + b + \bar{d}\bar{c} + adc$$

# Aufgabe 4 – Entwicklungssatz

41

## ► Der Entwicklungssatz

**Ziel:** Darstellung einer aussagenlogischer Formel durch eine Komposition von Fallunterscheidungen der einzelnen Variablen

**Sinn:**

- Ermöglicht Darstellung eines Entscheidungsdiagramms (BDD)
- Ermöglicht Umwandlung einer Formel in eine DNF oder KNF
- Erleichtert dadurch Umwandlung von Aussagenlogik in Schaltnetze

**Algorithmus:**

Sukzessive Entwicklung nach allen Variablen (s. Aufgabenbearbeitung)

# Aufgabe 4 – Entwicklungssatz

42

## ► Der Entwicklungssatz

Entwicklung nach a:

Trennen einer aussagenlogischen Formel  $f(a, b, \dots)$  in  $a[ \_ + \_ + \dots ] + \bar{a}[ \_ + \_ + \dots ]$ .

Fallunterscheidung:

- Jeder Term, der a enthält, wird exklusive a in  $a[\dots]$  hineingezogen.
- Jeder Term, der ein  $\bar{a}$  enthält, wird exklusive  $\bar{a}$  in  $\bar{a}[\dots]$  hineingezogen.
- Jeder Term, der weder a noch  $\bar{a}$  enthält, wird vollständig in  $\bar{a}[\dots]$  und  $a[\dots]$  hineingezogen.

Für die **Restterme** (abgekürzt mit  $F_a$  und  $F_{\bar{a}}$ ) innerhalb  $a[ \dots ]$  und  $\bar{a}[ \dots ]$  wird nach demselben Schema nach anderen Variablen b, c ... entwickelt.

# Aufgabe 4 – Entwicklungssatz

43

- ▶ Entwickeln Sie die Schaltfunktion nach der Variablen  $b$ . Geben Sie alle Zwischenschritte an.

$$y = \bar{a}\bar{c} + b + \bar{d}\bar{c} + adc$$

**Hinweis:** hier hilft die besprochene Fallunterscheidung

# Aufgabe 4 – Entwicklungssatz

- ▶ Entwickeln Sie die Schaltfunktion nach der Variablen  $b$ . Geben Sie alle Zwischenschritte an.

$$y = \bar{a}\bar{c} + b + \bar{d}\bar{c} + adc$$

Terme mit $b$ :	$b$	→	$b[ \_ + \_ + \dots ]$ exklusive $b$
Terme mit $\bar{b}$ :	$/$	→	$\bar{b}[ \_ + \_ + \dots ]$ exklusive $\bar{b}$
Terme ohne $b/\bar{b}$ :	$\bar{a}\bar{c}, adc, \bar{d}\bar{c}$	→	vollständig in $b$ und $\bar{b}[ \_ + \_ + \dots ]$

$$Y = b[1] + \bar{b}[\bar{a}\bar{c} + adc + \bar{d}\bar{c}] = b F_b + \bar{b} F_{\bar{b}}$$

# Aufgabe 4 – Entwicklungssatz

45

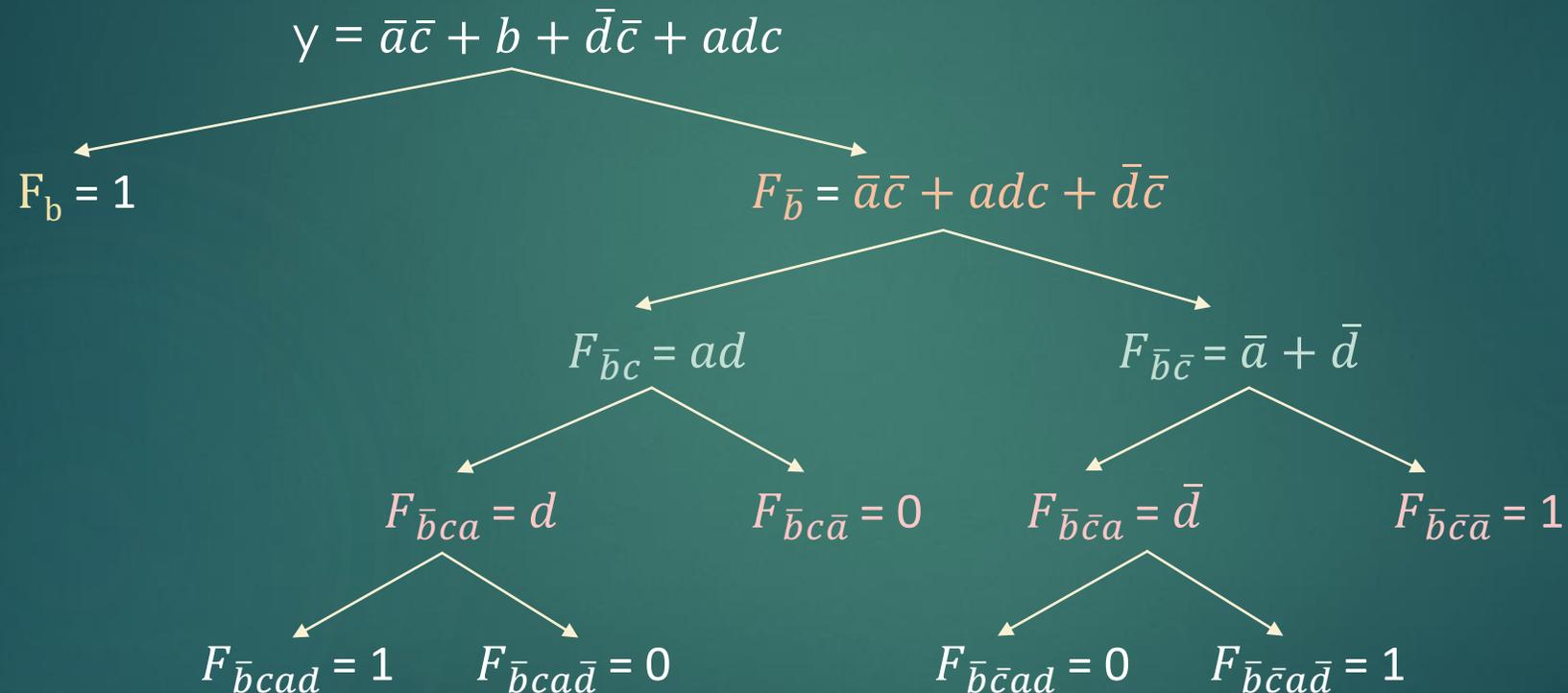
- ▶ Entwickeln Sie die **Restfunktion** zuerst nach der Variablen  $c$  und dann, falls erforderlich nach den verbleibenden Variablen, so dass als Restfunktion **nur noch Konstanten** (hier 0 oder 1) übrig bleiben. Geben Sie alle Zwischenschritte an.

$$y = \bar{a}\bar{c} + b + \bar{d}\bar{c} + adc$$

**Hinweis:** die Restterme werden getrennt entwickelt und dann zusammengesetzt

# Aufgabe 4 – Entwicklungssatz

- ▶ Entwickeln nach  $c$ , dann weiter bis nur Konstanten übrig bleiben



# Aufgabe 4 – Entwicklungssatz

Hier noch einmal rein rechnerisch:

$$\begin{aligned}F_{\bar{b}} &= \bar{a}\bar{c} + \bar{c}\bar{d} + acd = c \cdot (ad) + \bar{c} \cdot (\bar{a} + \bar{d}) = \\ &= cF_{\bar{b}c} + \bar{c}F_{\bar{b}\bar{c}} \\ F_{\bar{b}c} &= ad = a \cdot d + \bar{a} \cdot 0 = aF_{\bar{b}ca} + \bar{a}F_{\bar{b}c\bar{a}} \\ F_{\bar{b}\bar{c}} &= (\bar{a} + \bar{d}) = a \cdot \bar{d} + \bar{a} \cdot 1 = aF_{\bar{b}\bar{c}a} + \bar{a}F_{\bar{b}\bar{c}\bar{a}} \\ F_{\bar{b}\bar{c}a} &= d \cdot 0 + \bar{d} \cdot 1 = dF_{\bar{b}\bar{c}ad} + \bar{d}F_{\bar{b}\bar{c}a\bar{d}} \\ F_{\bar{b}ca} &= d \cdot 1 + \bar{d} \cdot 0 = dF_{\bar{b}cad} + \bar{d}F_{\bar{b}ca\bar{d}} \\ E_{\bar{b}ca} &= a \cdot 1 + \bar{a} \cdot 0 = aE_{\bar{b}ca} + \bar{a}E_{\bar{b}ca}\end{aligned}$$

# Aufgabe 4 – Entwicklungssatz

48

- ▶ Zeichnen Sie das binäre Entscheidungsdiagramm zu folgender Funktion.

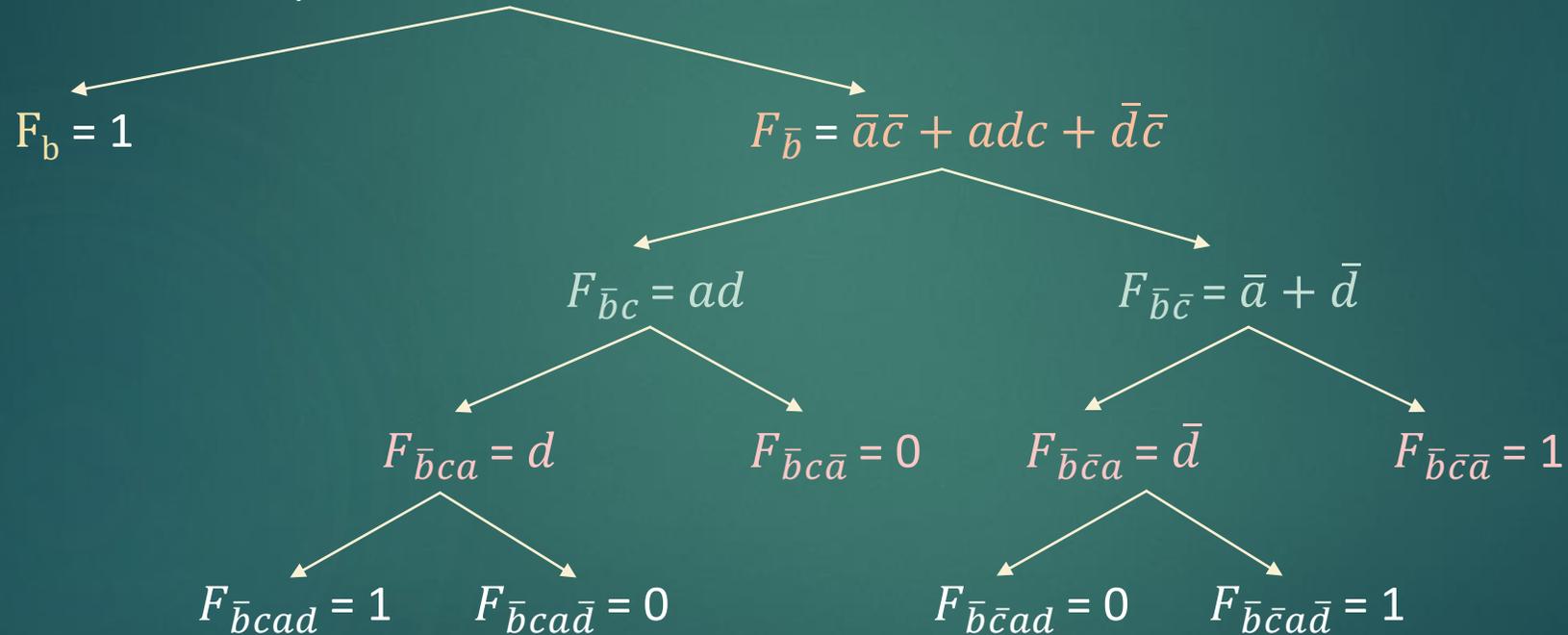
$$y = \bar{a}\bar{c} + b + \bar{d}\bar{c} + adc$$

**Hinweis:** dies ist eine grafische Darstellung der entwickelten Form

# Aufgabe 4 – Entwicklungssatz

- Zur Erinnerung die Teilaufgabe c

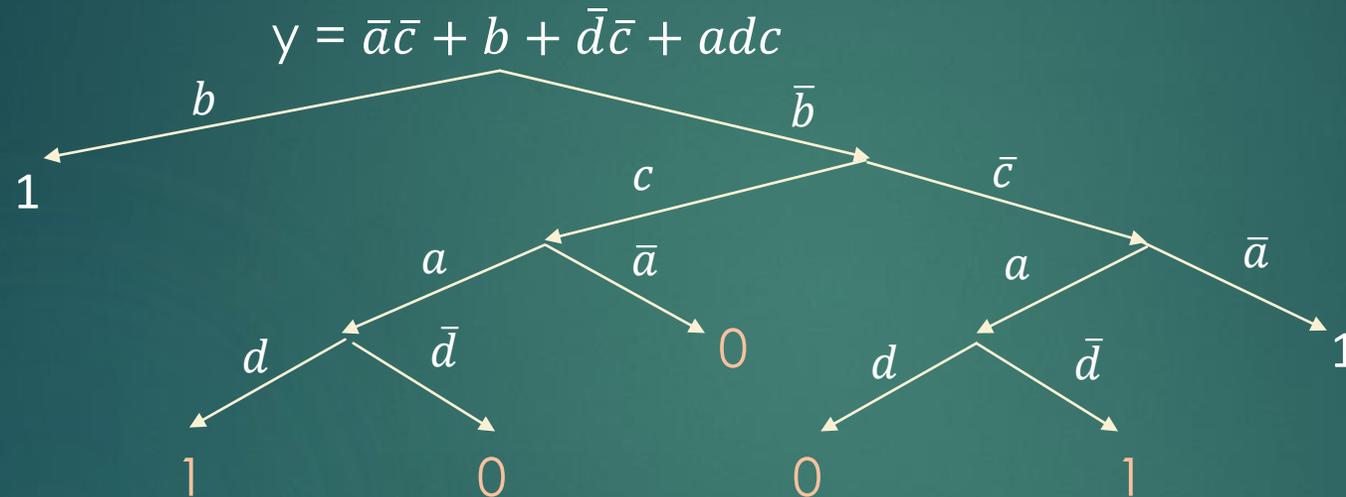
$$y = \bar{a}\bar{c} + b + \bar{d}\bar{c} + adc$$



# Aufgabe 4 – Entwicklungssatz

50

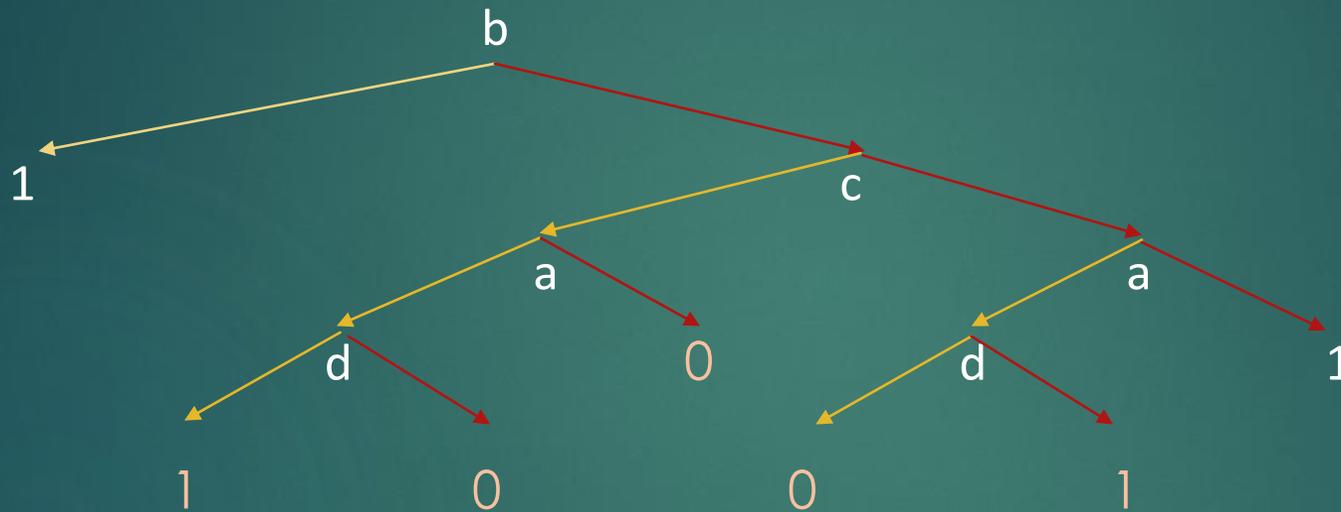
- Eine kürzere Darstellung der Aufgabe c



Nun werden wir im nächsten Schritt durch Einführen von Knoten, die nächste Variable, nach der entwickelt wird, indizieren und durch Färbung der Äste kennzeichnen, ob zur negierten oder nicht negierten Form entwickelt wurde.

# Aufgabe 4 – Entwicklungssatz

- ▶ Eine (noch) kürzere Darstellung der Aufgabe c

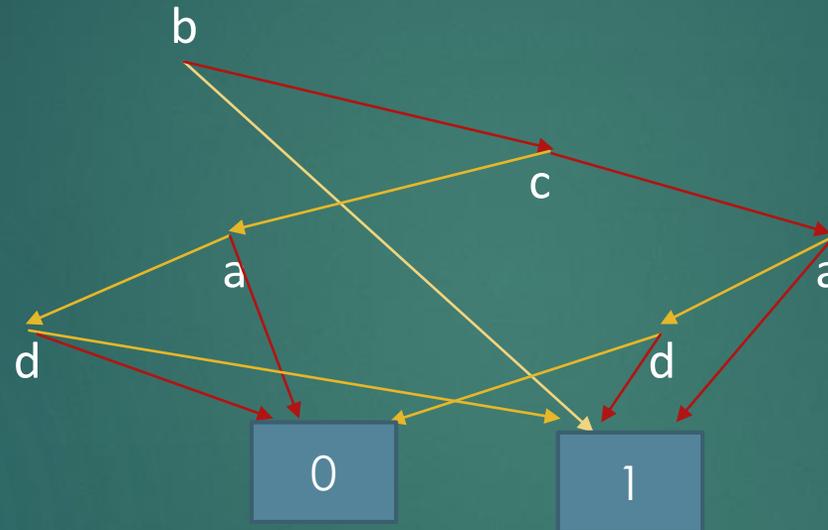


Das können wir noch verkürzen, indem wir alle Nullen und Einsen zu einem Kasten zusammenfassen. Der entstehende Baum ist unser BDD.

# Aufgabe 4 – Entwicklungssatz

52

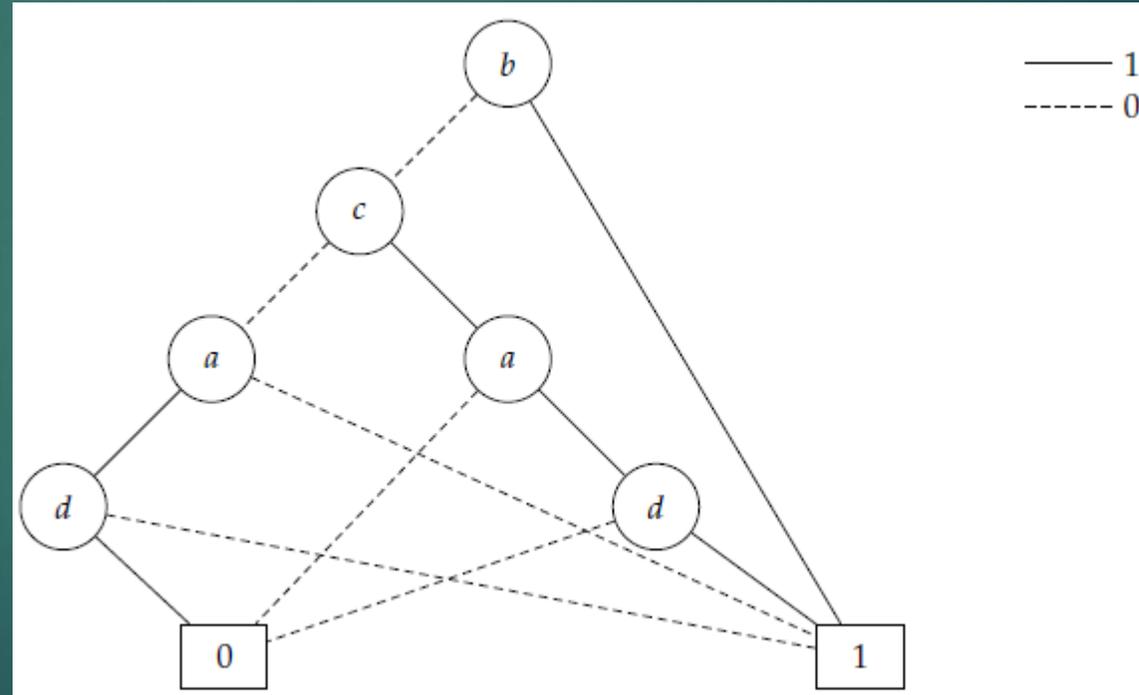
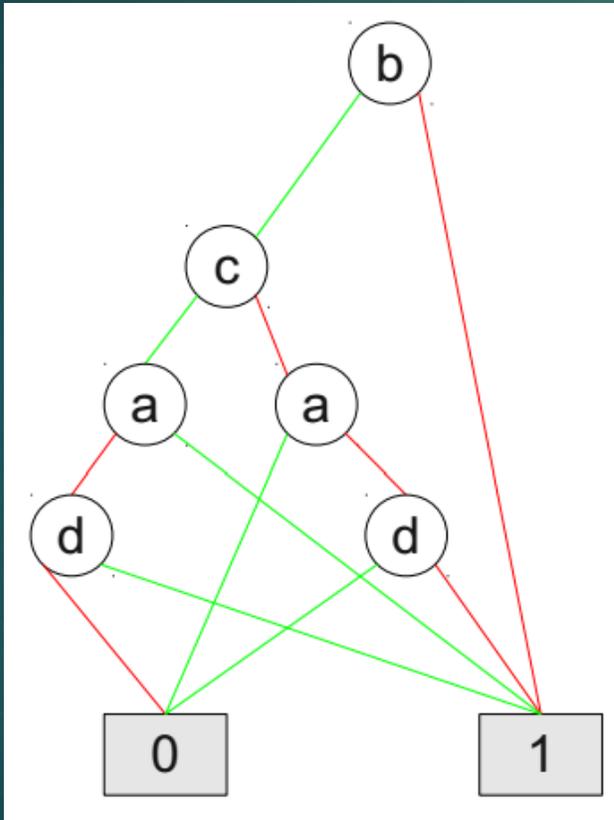
- ▶ Eine (noch noch) kürzere Darstellung der Aufgabe c



Dies ist unser binärer Entscheidungsbaum, wobei gelb für die Entwicklung zur nicht negierten und rot für die Entwicklung zur negierten Form steht.

# Aufgabe 4 – Entwicklungssatz

- ▶ Und noch einmal etwas geordneter:





Vielen Dank für eure werte  
Aufmerksamkeit

“La originalidad consiste en el retorno al origen; así pues, original es aquello que vuelve a la simplicidad de las primeras soluciones.”

**Antoni Gaudi**