

# GTI – ÜBUNG 7

SYMMETRIEDIAGRAMME

# Aufgabe 1 – Symmetriediagramme

2

## Beschreibung

- ▶ Gegeben seien die vier in der Funktionstabelle abgebildeten Schaltfunktionen, jeweils abhängig vom Eingangsvektor  $X = \{D, C, B, A\}$ . Bestimmen Sie alle **Primterme** jeder Funktion mit Hilfe von **Symmetriediagrammen** und geben Sie jeweils eine **DMF** sowie eine **KMF** an.

# Aufgabe 1 – Symmetriediagramme

Hex	Oktal	D C B A	$y_1(x)$	$y_2(X)$	$y_3(X)$	$y_4(X)$
0	00	0 0 0 0	1	-	1	1
1	01	0 0 0 1	0	-	0	-
2	02	0 0 1 0	0	0	0	-
3	03	0 0 1 1	1	1	1	1
4	04	0 1 0 0	1	-	0	0
5	05	0 1 0 1	1	-	1	1
6	06	0 1 1 0	1	1	1	1
7	07	0 1 1 1	1	0	1	1
8	10	1 0 0 0	0	-	0	0
9	11	1 0 0 1	0	-	0	0
A	12	1 0 1 0	0	1	0	-
B	13	1 0 1 1	0	0	0	0
C	14	1 1 0 0	0	-	1	1
D	15	1 1 0 1	0	-	1	1
E	16	1 1 1 0	0	0	1	1
F	17	1 1 1 1	0	1	0	-

# Aufgabe 1 – Symmetriediagramme

Erinnerung:

**Disjunktive Form (DF):**

Disjunktion (= Veroderung) mehrerer Terme aus Konjunktionen

Beispiel:  $f_1(a, b, c) = a \cdot b + a \cdot b \cdot \bar{c} + \bar{b}$

**Disjunktive Normalform (DNF):**

Disjunktion mehrerer Minterme (d.h. Konjunktionen aller Literale der Funktion)

Beispiel:  $f_1(a, b, c) = abc + ab\bar{c} + a\bar{b}c + \bar{a}\bar{b}c + a\bar{b}\bar{c} + \bar{a}\bar{b}\bar{c}$

**Disjunktive Minimalform (DMF):**

Disjunktion mehrerer durch Konjunktion verknüpften Literale, die (ohne ihre Form zu verletzen) nicht weiter vereinfacht werden kann

Beispiel:  $f_1(a, b, c) = a \cdot b + \bar{b}$

# Aufgabe 1 – Symmetriediagramme

5

Erinnerung:

**Konjunktive Form (KF):**

Konjunktion (= Veroderung) mehrerer Terme aus Disjunktionen

$$\text{Beispiel: } f_1(a, b, c) = (a + b) \cdot (a + b + \bar{c}) \cdot \bar{b}$$

**Konjunktive Normalform (KNF):**

Konjunktion mehrerer Maxterme (d.h. Disjunktionen aller Literale der Funktion)

$$\text{Beispiel: } f_1(a, b, c) = (a + b + c) \cdot (a + b + \bar{c}) \cdot (a + \bar{b} + c) \cdot (\bar{a} + \bar{b} + c) \\ \cdot (a + \bar{b} + \bar{c}) \cdot (\bar{a} + \bar{b} + \bar{c})$$

**Konjunktive Minimalform (KMF):**

Konjunktion mehrerer durch Disjunktion verknüpften Literale, die (ohne ihre Form zu verletzen) nicht weiter vereinfacht werden kann

$$\text{Beispiel: } f_1(a, b, c) = (a + b) \cdot \bar{b}$$

# Aufgabe 1 – Symmetriediagramme

6

Begriffsklärung:

**Primterm:**

- Minimale Terme einer DMF bzw. KMF
- D.h. maximale Einsenüberdeckung bzw. Nullenüberdeckung im SD

**Primimplikant:**

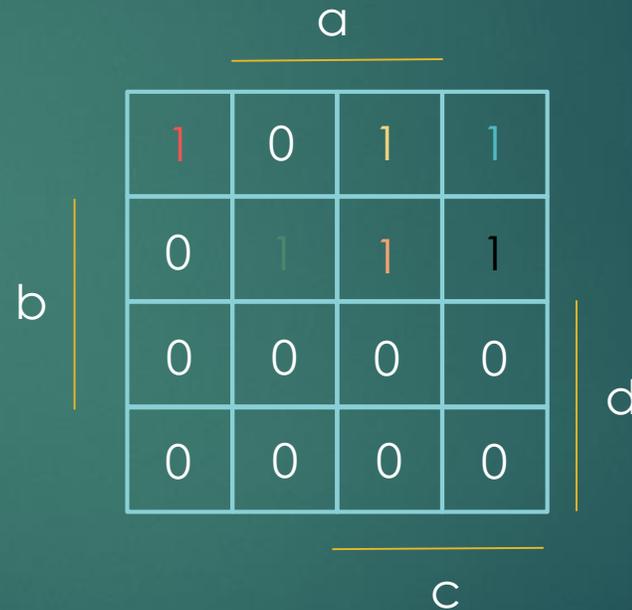
- Primterm einer DMF
- Also: maximale Einsen- bzw. Don't Care - Überdeckung im SD

**Primimplikat:**

- Primterm einer KMF
- Also: maximale Nullen- bzw. Don't Care - Überdeckung im SD

# Aufgabe 1 – Symmetriediagramme

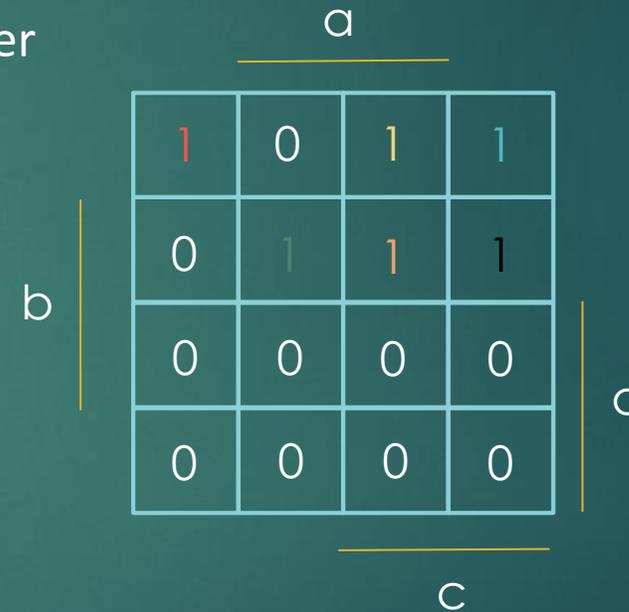
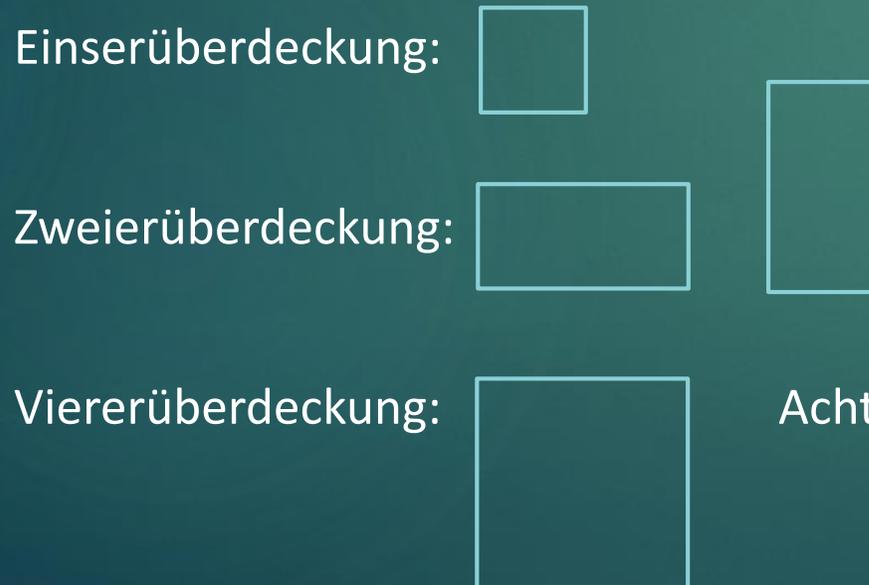
Hex	Oktal	D C B A	$y_1(x)$
0	00	0 0 0 0	1
1	01	0 0 0 1	0
2	02	0 0 1 0	0
3	03	0 0 1 1	1
4	04	0 1 0 0	1
5	05	0 1 0 1	1
6	06	0 1 1 0	1
7	07	0 1 1 1	1
8	10	1 0 0 0	0
9	11	1 0 0 1	0
A	12	1 0 1 0	0
B	13	1 0 1 1	0
C	14	1 1 0 0	0
D	15	1 1 0 1	0
E	16	1 1 1 0	0
F	17	1 1 1 1	0



# Aufgabe 1 – Symmetriediagramme

- ▶ Bestimmen der Primterme (maximale Einsenüberdeckungen)

Überdeckungen dürfen nur 1 oder – enthalten, aber keine Nullen. Zudem sind nur durch Symmetriespiegelung entstandene Formen erlaubt:



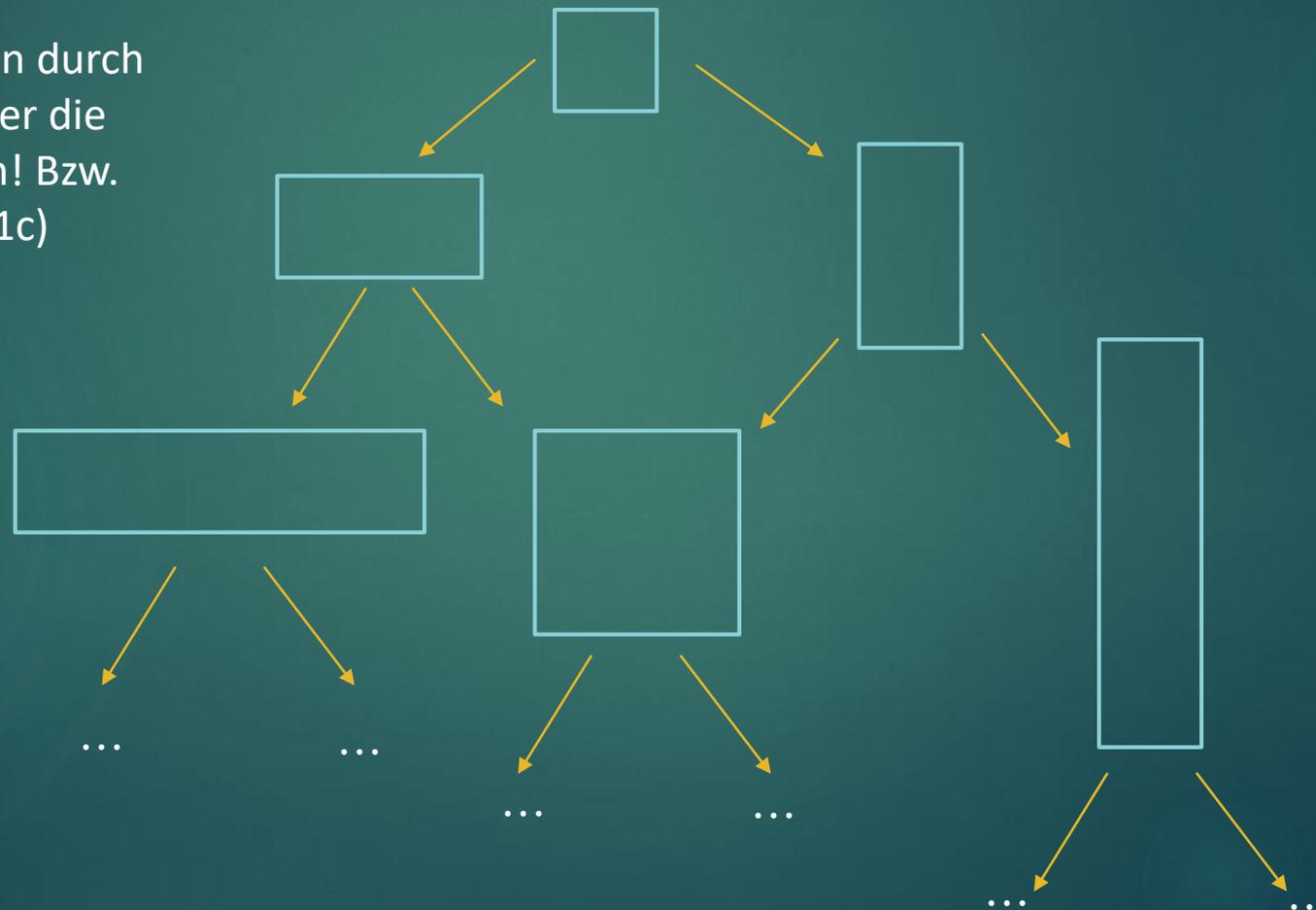
# Aufgabe 1 – Symmetriediagramme

9

## ► Spiegelung außerhalb des Symmetriediagramms

### Achtung:

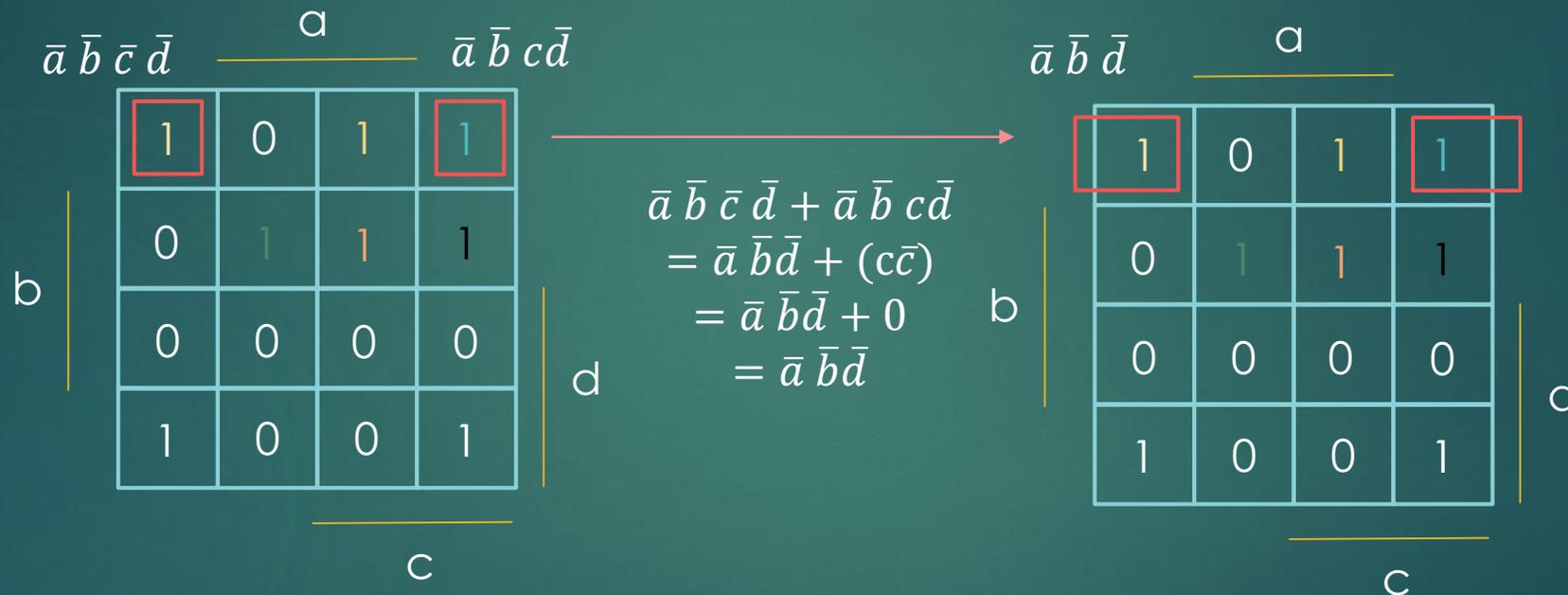
Diese Formen können durch Spiegelung im SD über die Kanten hinaus gehen! Bzw. zerteilt werden (s. A1c)



# Aufgabe 1 – Symmetriediagramme

10

## ► Symmetriespiegelung im Symmetriediagramm

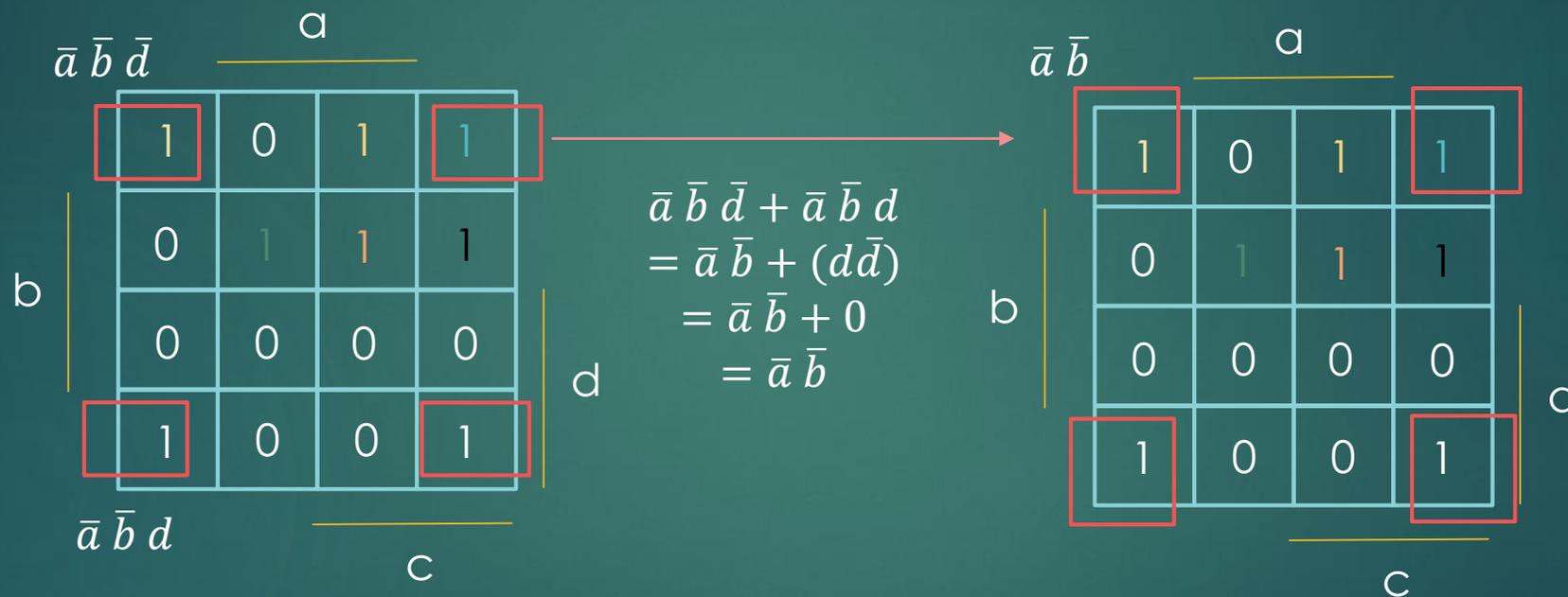


Man spiegelt, so dass sich nur die Überdeckung eines Literals ändert!  
Im obigen Beispiel bleiben a, b und d unverändert und nur c ändert sich

# Aufgabe 1 – Symmetriediagramme

11

## ► Symmetriespiegelung im Symmetriediagramm

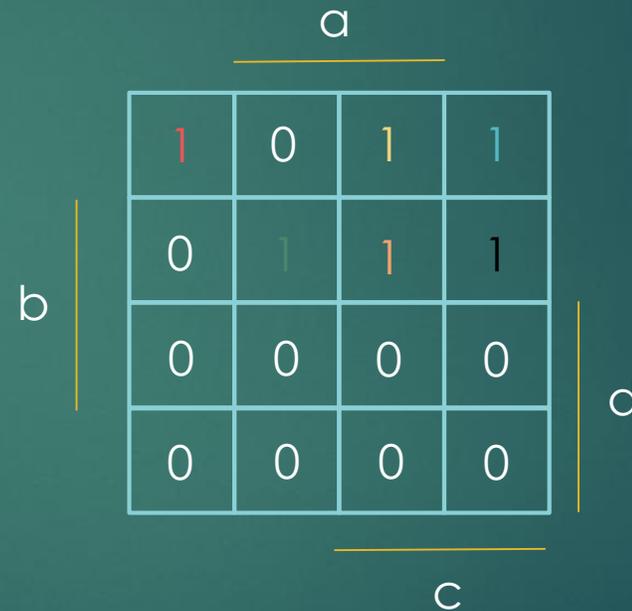


Wir minimieren also durch Reduktion mehrerer längerer Terme auf einen kürzeren Term, der immer noch alle Stellen der Ursprungsterme überdeckt!

# Aufgabe 1 – Symmetriediagramme

12

Hex	Oktal	D C B A	$y_1(x)$
0	00	0 0 0 0	1
1	01	0 0 0 1	0
2	02	0 0 1 0	0
3	03	0 0 1 1	1
4	04	0 1 0 0	1
5	05	0 1 0 1	1
6	06	0 1 1 0	1
7	07	0 1 1 1	1
8	10	1 0 0 0	0
9	11	1 0 0 1	0
A	12	1 0 1 0	0
B	13	1 0 1 1	0
C	14	1 1 0 0	0
D	15	1 1 0 1	0
E	16	1 1 1 0	0
F	17	1 1 1 1	0



# Aufgabe 1 – Symmetriediagramme

13

- ▶ Bestimmen der Primterme (maximale Einsenüberdeckungen)

Wir finden geometrisch alle maximalen Einsenüberdeckungen (d.h. Primterme):

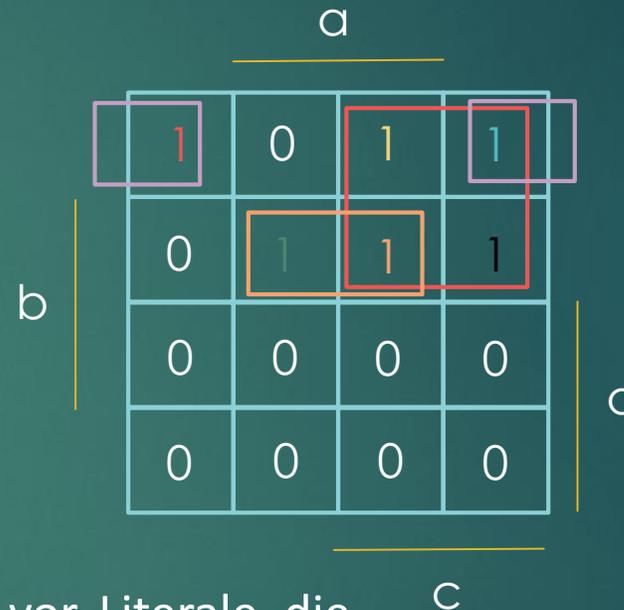
Auch über die Ecken hinaus möglich!

Auslesen von Primtermen:

Alle Literale, welche die Überdeckung vollständig oder überhaupt nicht enthalten, kommen im Term vor. Literale, die den Block nur partiell überdecken werden gestrichen (diese kommen negiert, sowie nicht negiert vor und annihilieren sich so gegenseitig)!

Beispiel: Der rote Block wird von  $c$  vollständig und von  $d$  überhaupt nicht überdeckt

➤  $c\bar{d}$





# Aufgabe 1 – Symmetriediagramme

15

## ► Bestimmen der DMF

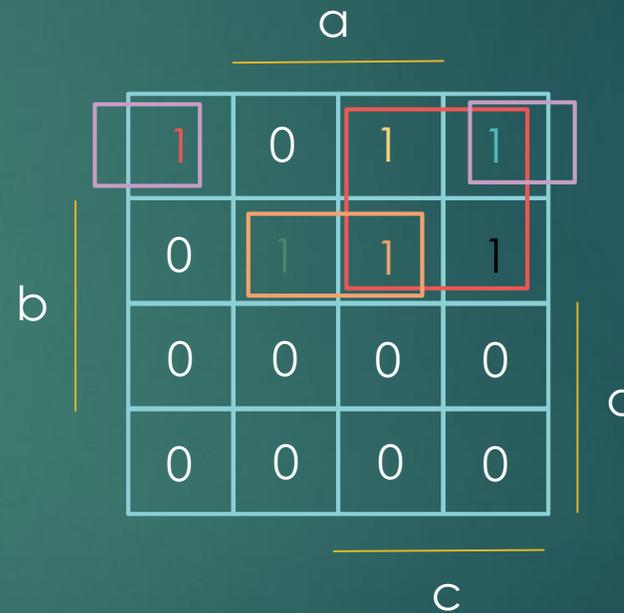
Primimplikanten:

1er Überdeckungen: /

2er Überdeckungen:  $ab\bar{d}, \bar{a}\bar{b}\bar{d}$

4er Überdeckungen:  $c\bar{d}$

DMF:  $ab\bar{d} + \bar{a}\bar{b}\bar{d} + c\bar{d}$



# Aufgabe 1 – Symmetriediagramme

16

## ► Bestimmen der KMF

Primimplikate:

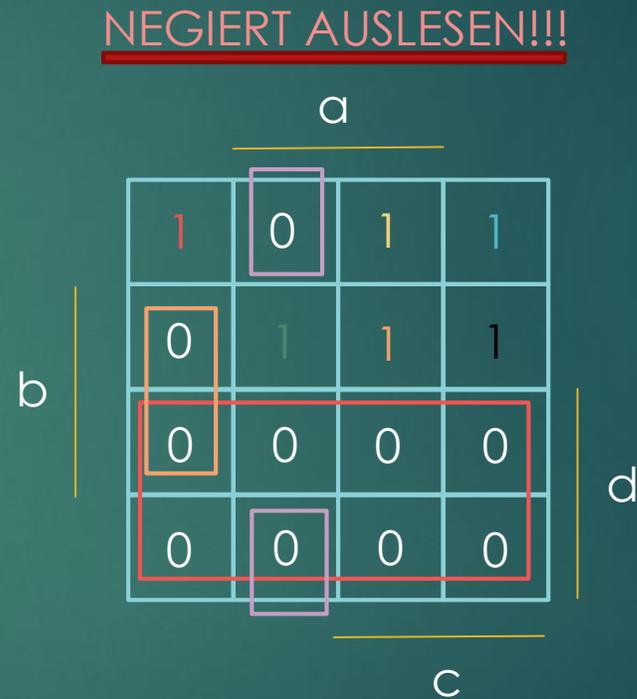
1er Überdeckungen: /

2er Überdeckungen:  $\bar{a} + b + c, a + \bar{b} + c$

4er Überdeckungen: /

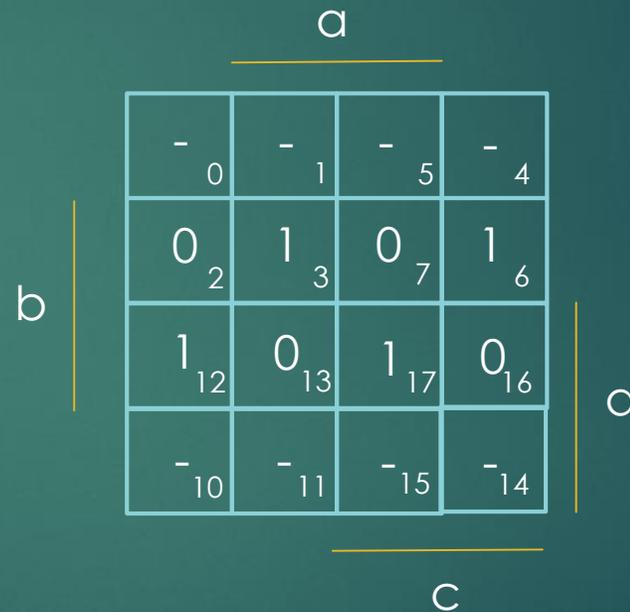
8er Überdeckungen:  $\bar{d}$

KMF:  $(\bar{a} + b + c) \cdot (a + \bar{b} + c) \cdot \bar{d}$



# Aufgabe 1 – Symmetriediagramme

Hex	Oktal	D C B A	$y_2(X)$
0	00	0 0 0 0	-
1	01	0 0 0 1	-
2	02	0 0 1 0	0
3	03	0 0 1 1	1
4	04	0 1 0 0	-
5	05	0 1 0 1	-
6	06	0 1 1 0	1
7	07	0 1 1 1	0
8	10	1 0 0 0	-
9	11	1 0 0 1	-
A	12	1 0 1 0	1
B	13	1 0 1 1	0
C	14	1 1 0 0	-
D	15	1 1 0 1	-
E	16	1 1 1 0	0
F	17	1 1 1 1	1



# Aufgabe 1 – Symmetriediagramme

18

- ▶ Bestimmen der Primterme (maximale Einsenüberdeckungen)

Wir finden geometrisch alle maximalen Einsenüberdeckungen (d.h. Primterme):

Primterme (Primimplikanten):

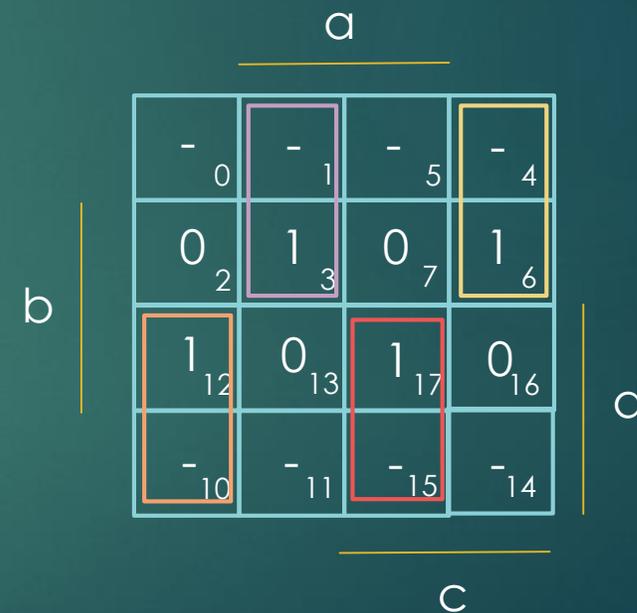
1er Überdeckungen: /

2er Überdeckungen:  $\bar{a}\bar{c}\bar{d}, a\bar{c}\bar{d}, acd, \bar{a}c\bar{d}$

4er Überdeckungen: /

8er Überdeckungen:  $\bar{b}$

$\bar{b}$  ist dabei eine reine Don't Care – Überdeckung!



# Aufgabe 1 – Symmetriediagramme

19

- ▶ Bestimmen der DNF und DMF

Primterme:

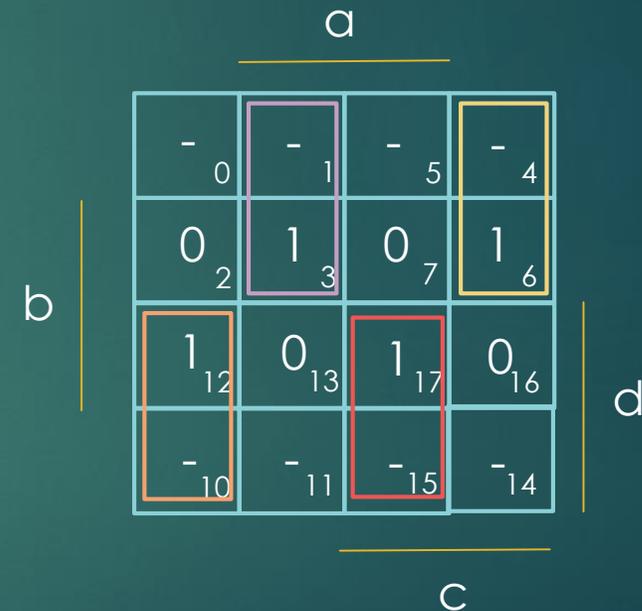
$$\bar{a}\bar{c}d, a\bar{c}\bar{d}, acd, \bar{a}c\bar{d}, (\bar{b})$$

DMF:

Wir müssen alle Primterme nehmen, da diese Kerne sind  
 $\bar{a}\bar{c}d + a\bar{c}\bar{d} + acd + \bar{a}c\bar{d}$

DNF:

Wir erweitern alle Primterme mit der Fallunterscheidung (Don't cares streichen)  
 $\bar{a}b\bar{c}d + ab\bar{c}\bar{d} + abcd + \bar{a}bc\bar{d} + \bar{a}\bar{b}\bar{c}d + \bar{a}\bar{b}c\bar{d} + \bar{a}\bar{b}cd + \bar{a}b\bar{c}\bar{d}$



# Aufgabe 1 – Symmetriediagramme

20

## ► Bestimmen der KMF

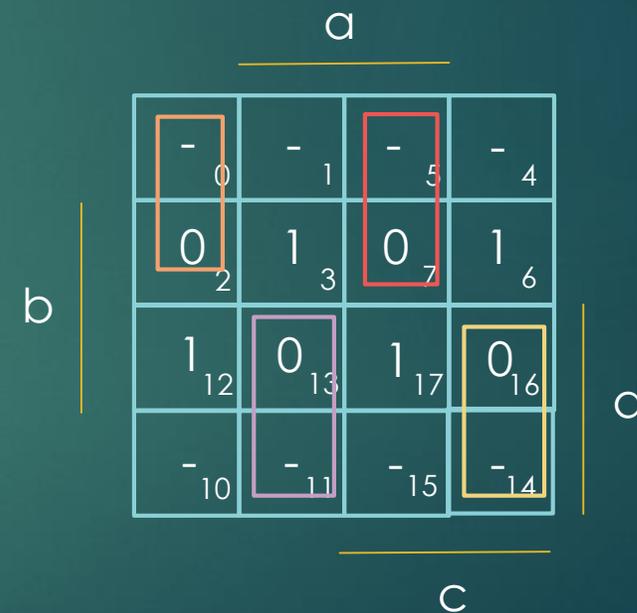
Primimplikate:

1er Überdeckungen: /

2er Überdeckungen:  $\bar{a} + \bar{c} + d, a + \bar{c} + \bar{d},$   
 $a + c + d, \bar{a} + c + \bar{d}$

KMF:

$$(\bar{a} + \bar{c} + d) \cdot (a + \bar{c} + \bar{d}) \cdot (a + c + d) \cdot (\bar{a} + c + \bar{d})$$



# Aufgabe 1 – Symmetriediagramme

21

Begriffsklärung:

**Kernimplikant:**

- Primterm einer DMF, der in der DMF enthalten sein muss
- Überdeckt also eine Einstelle, die kein anderer Primimplikant überdeckt

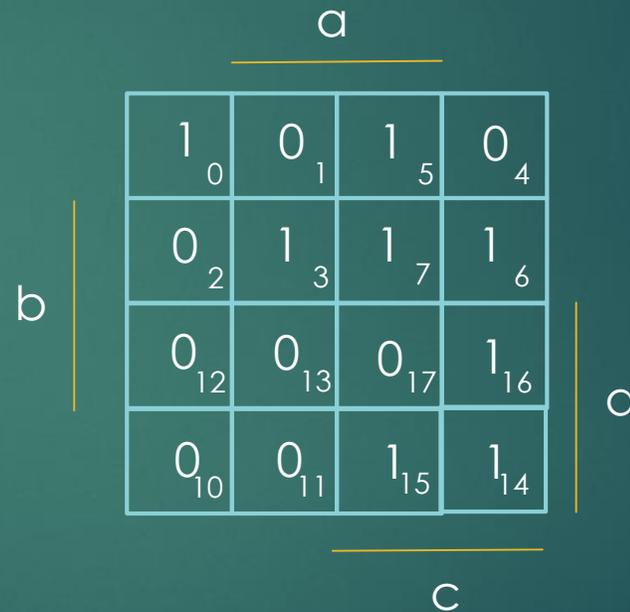
**Kernimplikat:**

- Primterm einer KMF, der in der KMF enthalten sein muss
- Überdeckt also eine Nullstelle, die kein anderer Primimplikat überdeckt

Durch die Überdeckung der Einstellen und Nullstellen können alle Primterme gefunden werden. Die DMF/KMF setzt sich aus einer kostenminimalen Auswahl dieser Terme zusammen!

# Aufgabe 1 – Symmetriediagramme

Hex	Oktal	D C B A	$y_3(X)$
0	00	0 0 0 0	1
1	01	0 0 0 1	0
2	02	0 0 1 0	0
3	03	0 0 1 1	1
4	04	0 1 0 0	0
5	05	0 1 0 1	1
6	06	0 1 1 0	1
7	07	0 1 1 1	1
8	10	1 0 0 0	0
9	11	1 0 0 1	0
A	12	1 0 1 0	0
B	13	1 0 1 1	0
C	14	1 1 0 0	1
D	15	1 1 0 1	1
E	16	1 1 1 0	1
F	17	1 1 1 1	0



# Aufgabe 1 – Symmetriediagramme

23

- ▶ Bestimmen der Primterme (maximale Einsenüberdeckungen)

Wir finden geometrisch alle maximalen Einsenüberdeckungen (d.h. Primterme):

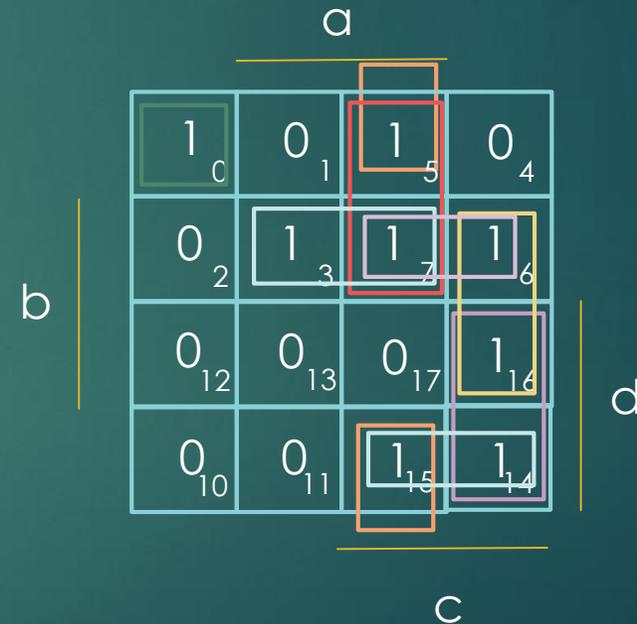
Primterme (Primimplikanten):

1er Überdeckungen:  $\bar{a}\bar{b}\bar{c}\bar{d}$

2er Überdeckungen:  $ab\bar{d}, ac\bar{d}, \bar{a}bc, bc\bar{d}$

$\bar{a}bc, \bar{a}cd, \bar{b}cd$

4er Überdeckungen: /



# Aufgabe 1 – Symmetriediagramme

24

- ▶ Bestimmen der DNF und DMF

Primterme:

$$\bar{a}\bar{b}\bar{c}\bar{d}, ab\bar{d}, ac\bar{d}, \bar{a}\bar{b}c, bc\bar{d}, \bar{a}bc, \bar{a}cd, \bar{b}cd$$

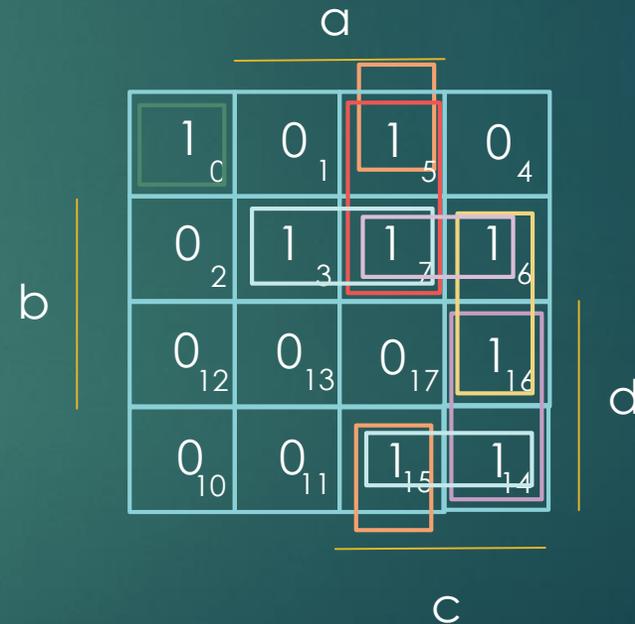
Hier gibt es mehrere Möglichkeiten der Bildung, da manche Primterme redundant sind (Methodik später!)

DMF:

$$\bar{a}\bar{b}\bar{c}\bar{d} + ab\bar{d} + \bar{a}\bar{b}c + \bar{a}bc + \bar{b}cd$$

DNF (Idempotenz):

$$\bar{a}\bar{b}\bar{c}\bar{d} + abc\bar{d} + \bar{a}\bar{b}cd + \bar{a}bcd + \bar{a}bcd + ab\bar{c}\bar{d} + \bar{a}\bar{b}c\bar{d} + \bar{a}bc\bar{d} + \bar{a}\bar{b}cd$$



# Aufgabe 1 – Symmetriediagramme

25

## ► Bestimmen der KMF

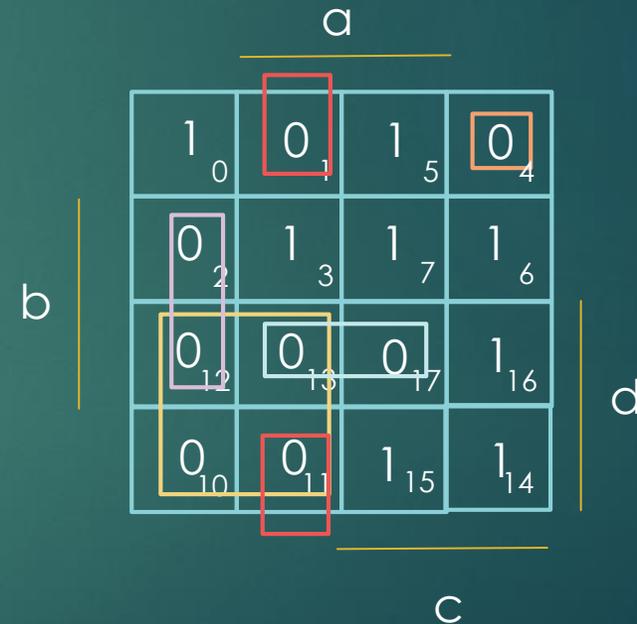
Primterme (Primimplikanten):

1er Überdeckungen:  $a + b + \bar{c} + d$

2er Überdeckungen:  $\bar{a} + \bar{b} + \bar{d}, a + \bar{b} + c,$

$\bar{a} + b + c$

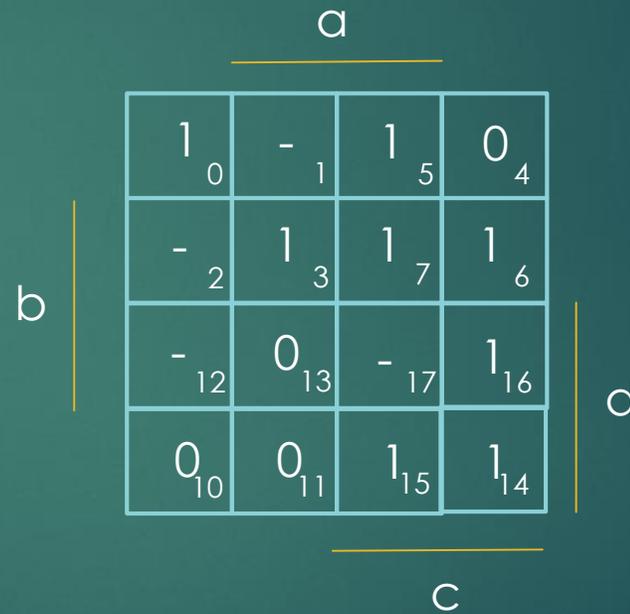
4er Überdeckungen:  $c + \bar{d}$



KMF:  $(a + b + \bar{c} + d)(\bar{a} + \bar{b} + \bar{d})(a + \bar{b} + c)(\bar{a} + b + c)(c + \bar{d})$

# Aufgabe 1 – Symmetriediagramme

Hex	Oktal	D C B A	$y_4(X)$
0	00	0 0 0 0	1
1	01	0 0 0 1	-
2	02	0 0 1 0	-
3	03	0 0 1 1	1
4	04	0 1 0 0	0
5	05	0 1 0 1	1
6	06	0 1 1 0	1
7	07	0 1 1 1	1
8	10	1 0 0 0	0
9	11	1 0 0 1	0
A	12	1 0 1 0	-
B	13	1 0 1 1	0
C	14	1 1 0 0	1
D	15	1 1 0 1	1
E	16	1 1 1 0	1
F	17	1 1 1 1	-



# Aufgabe 1 – Symmetriediagramme

27

- ▶ Bestimmen der Primterme (maximale Einsenüberdeckungen)

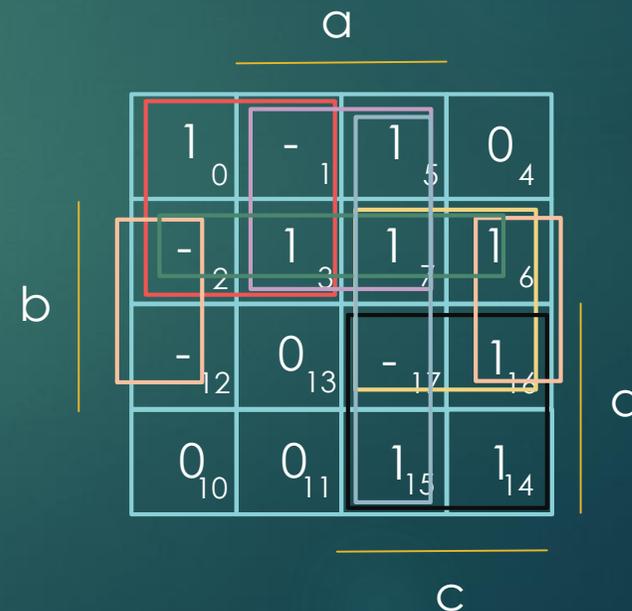
Wir finden geometrisch alle maximalen Einsenüberdeckungen (d.h. Primterme):

Primterme:

1er Überdeckungen: /

2er Überdeckungen: /

4er Überdeckungen:  $\bar{c}\bar{d}, a\bar{d}, bc, cd, b\bar{d}, ac, b\bar{a}$



# Aufgabe 1 – Symmetriediagramme

28

- ▶ Bestimmen der Primterme (maximale Einsenüberdeckungen)

Auswahl an Primtermen:  $\bar{c}\bar{d}, a\bar{d}, bc, cd, b\bar{d}, ac, b\bar{a}$

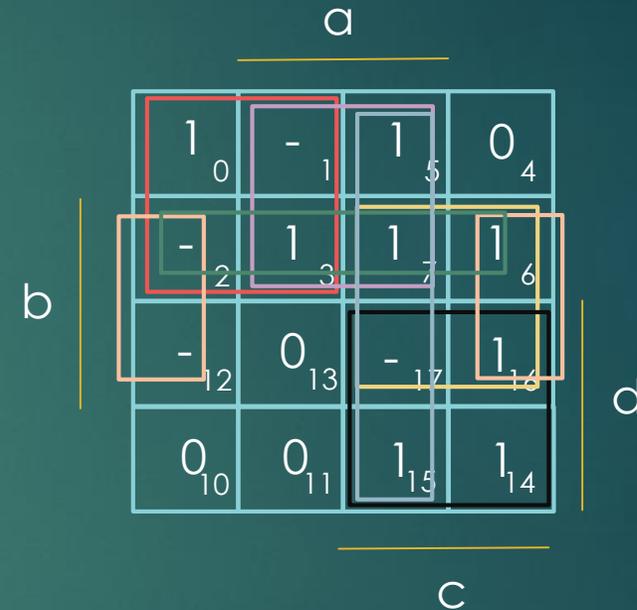
DMF:

$$\bar{c}\bar{d} + a\bar{d} + bc + cd$$

Statt dem Erweitern und Streichen kann man auch jeden jeden Einser-Term noch einmal selbstständig aufstellen:

DNF:

$$\bar{a}\bar{b}\bar{c}\bar{d} + ab\bar{c}\bar{d} + a\bar{b}c\bar{d} + \bar{a}bc\bar{d} + abc\bar{d} + \bar{a}\bar{b}cd + a\bar{b}cd + \bar{a}bcd$$



# Aufgabe 1 – Symmetriediagramme

29

► Bestimmen der KMF:

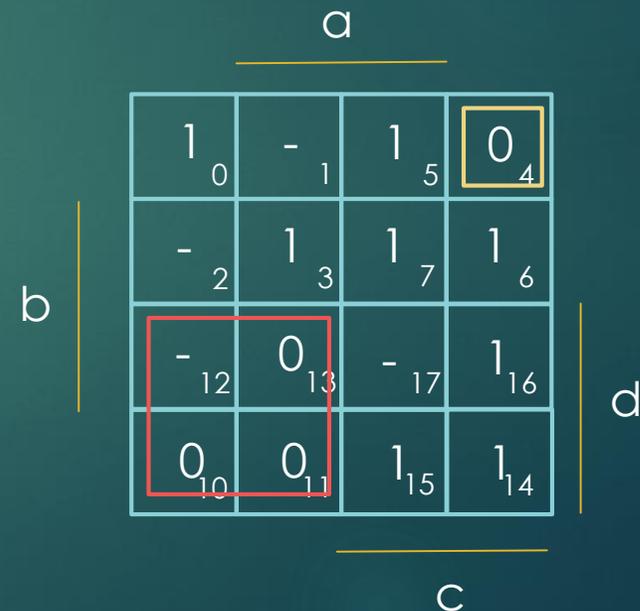
Primterme:

1er Überdeckungen:  $a + b + \bar{c} + d$

2er Überdeckungen:  $/$

4er Überdeckungen:  $c + \bar{d}$

KMF:  $(a + b + \bar{c} + d)(c + \bar{d})$



# Aufgabe 1 – Symmetriediagramme

30

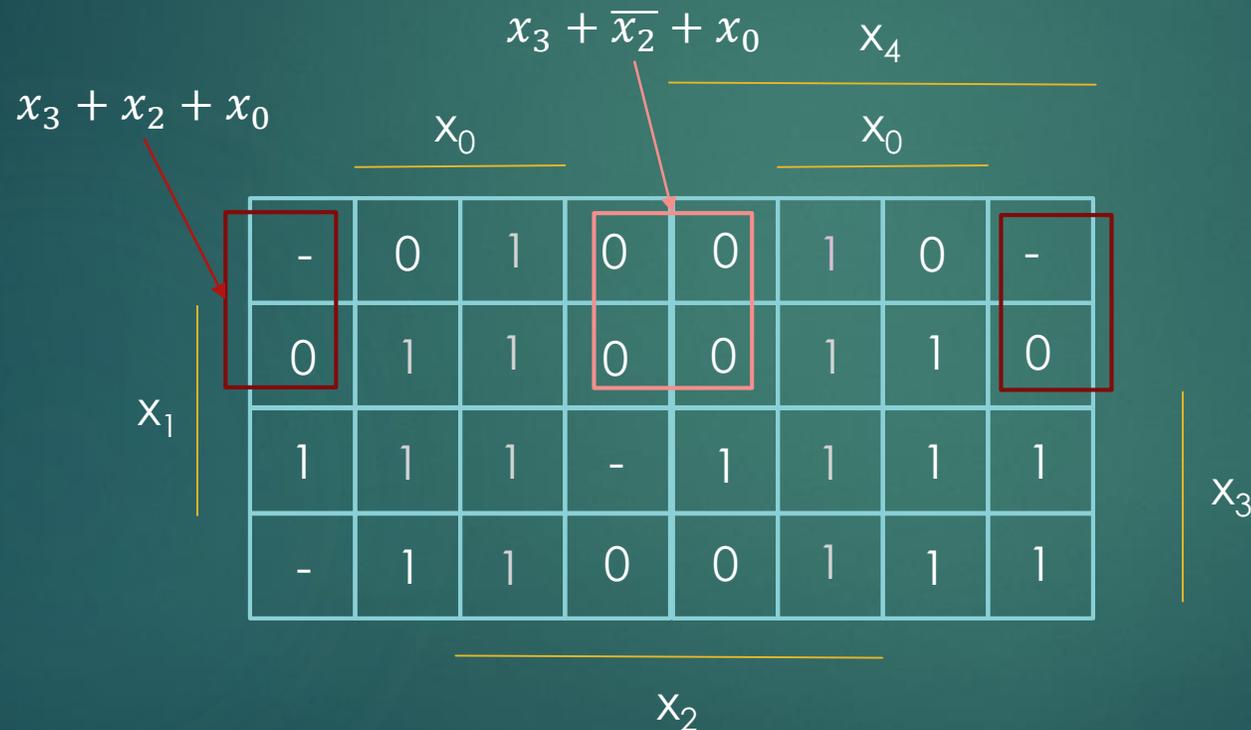
## Beschreibung

- ▶ Bestimmen Sie mithilfe des unten gegebenen Symmetriediagramms alle **Primimplikate** der darin spezifizierten Schaltfunktion  $f_5(x_4, x_3, x_2, x_1, x_0)$  und geben Sie deren schaltalgebraische Ausdrücke an. Kennzeichnen Sie durch Unterstreichen alle **Kernimplikate**.



# Aufgabe 1 – Symmetriediagramme

**Tipp:** alle maximalen Überdeckungen raussuchen und danach durch Vergleich der entstehenden Terme untersuchen, ob diese noch weiter reduziert werden können!



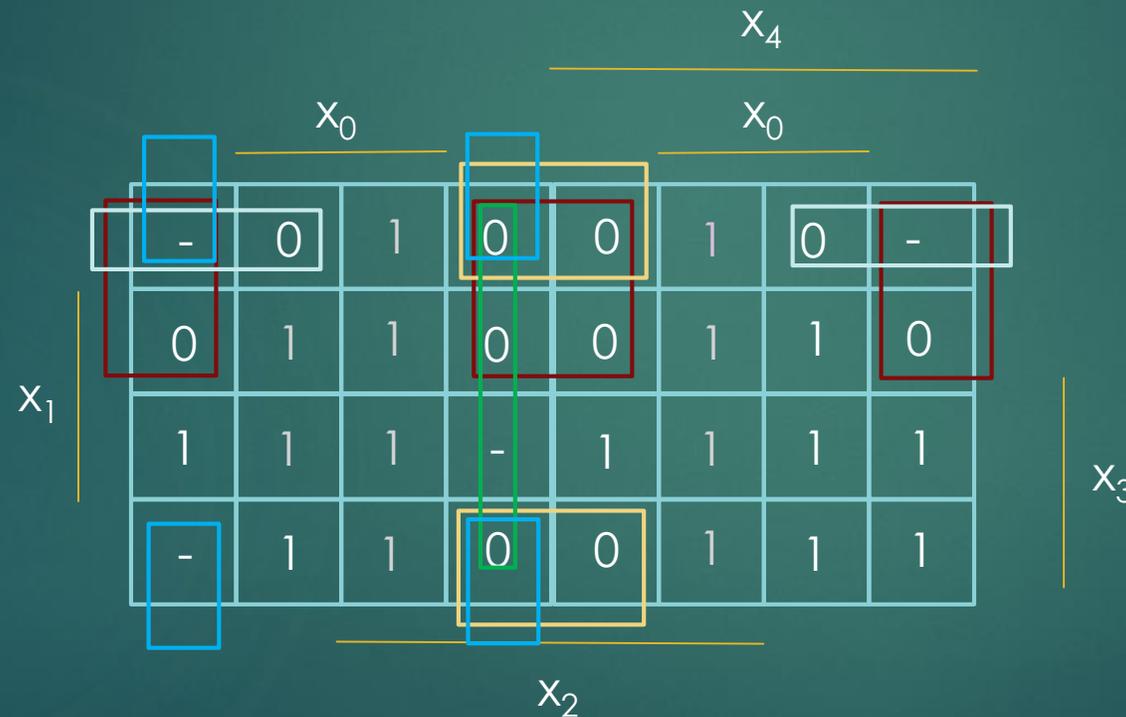
$$x_3 + x_2 + x_0 \text{ und } x_3 + \bar{x}_2 + x_0 \rightarrow x_3 + x_0$$

Nicht maximal! Beide Terme können verschmolzen werden.

# Aufgabe 1 – Symmetriediagramme

33

- ▶ Alle Primimplikate + deren schaltalgebraische Ausdrücke. Kennzeichnen Sie durch Unterstreichen alle Kernimplikate.





# Aufgabe 1 – Symmetriediagramme

35

- ▶ Alle Primimplikate + deren schaltalgebraische Ausdrücke.  
Kennzeichnen Sie durch Unterstreichen alle Kernimplikate.

Primimplikate:

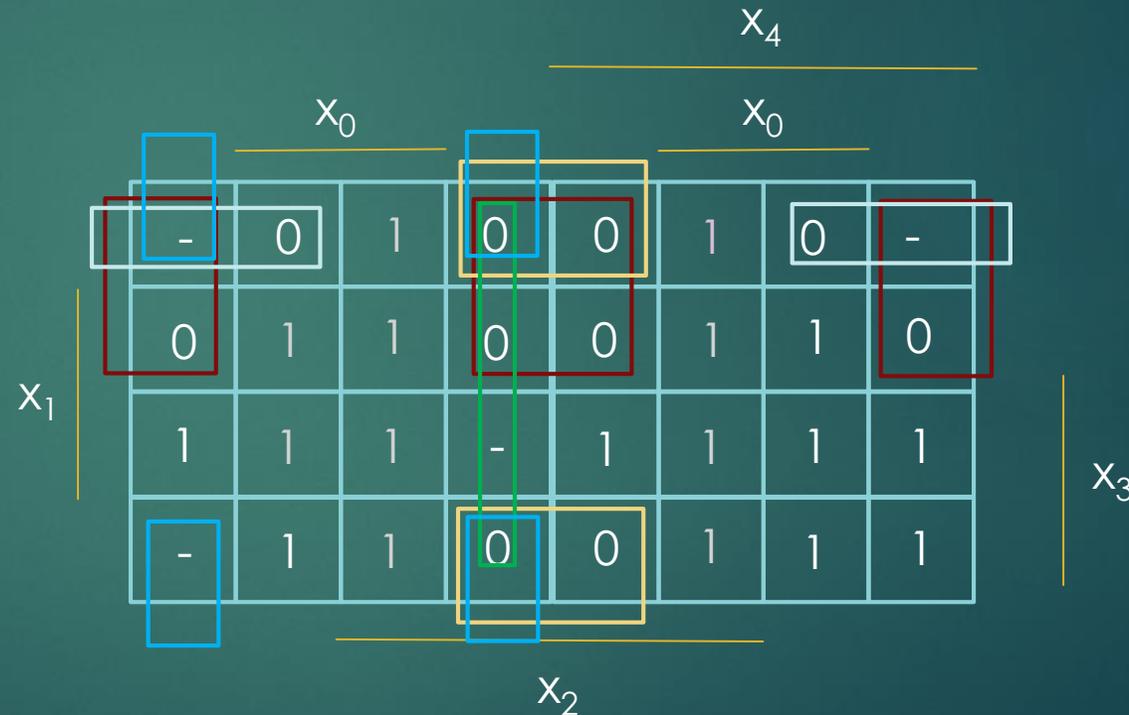
$$\underline{x_3 + x_2 + x_1},$$

$$\underline{x_4 + x_1 + x_0},$$

$$\underline{x_4 + \overline{x_2} + x_0},$$

$$\underline{\overline{x_2} + x_1 + x_0},$$

$$\underline{x_3 + x_0}.$$



Erinnerung: Kernterme überdecken eine Nullstelle (keine Freistelle!), die von keinem anderen Term überdeckt wird.

# Vielen Dank für eure angenehme Aufmerksamkeit!

36

- ▶ Diesmal eine Zitathorde des großartigen Cicero:

*"Accipere quam facere praestat iniuriam"* (schöner Subjektsinfinitiv!)

*"Consuetudinis magna vis est"*

*"Patria est ubicumque bene est."*

*"Cum tacent, clamant."* (cum identidem, cum coincidens)

*"Ut corpora nostra sine mente, sic civitas sine lege."* (Parallelismus)