

# GTI – ÜBUNG 12

KOMPARATOR UND ADDIERER

# Aufgabe 1 – Komparator

2

## Beschreibung

- ▶ Entwickeln Sie eine digitale Schaltung, die zwei Bits  $a$  und  $b$  miteinander vergleicht. Die Schaltung besitzt drei Ausgänge: ' $<$ ' ist logisch '1', genau dann, wenn  $a < b$ . Entsprechend ist ' $>$ ' genau dann '1', wenn  $a > b$ . Der Ausgang ' $=$ ' soll genau dann eine '1' anzeigen, wenn  $a$  und  $b$  gleich sind.
- ▶ Achten Sie darauf, dass stets genau einer der drei Ausgänge aktiv ist.
- ▶ **Hinweis:** Beginnen Sie mit einer Funktionstabelle.

# Aufgabe 1 – Komparator

## ► Funktionstabelle

Verlässliche Grundlage der digitalen Schaltungsbildung ist das Aufstellen einer Funktionstabelle, welche die abstrakte Beschreibung in funktional, logischer Form vereinfacht.

<b>a</b>	<b>b</b>	<b>a &lt; b</b>	<b>a = b</b>	<b>a &gt; b</b>
0	0	0	1	0
1	0	0	0	1
0	1	1	0	0
1	1	0	1	0

# Aufgabe 1 – Komparator

► Schaltfunktionen

a	b	a < b	a = b	a > b
0	0	0	1	0
1	0	0	0	1
0	1	1	0	0
1	1	0	1	0

$$f_{<} = \bar{a}b$$

$$f_{=} = \bar{a}\bar{b} + ab = \overline{a \otimes b} = a \text{ xnor } b$$

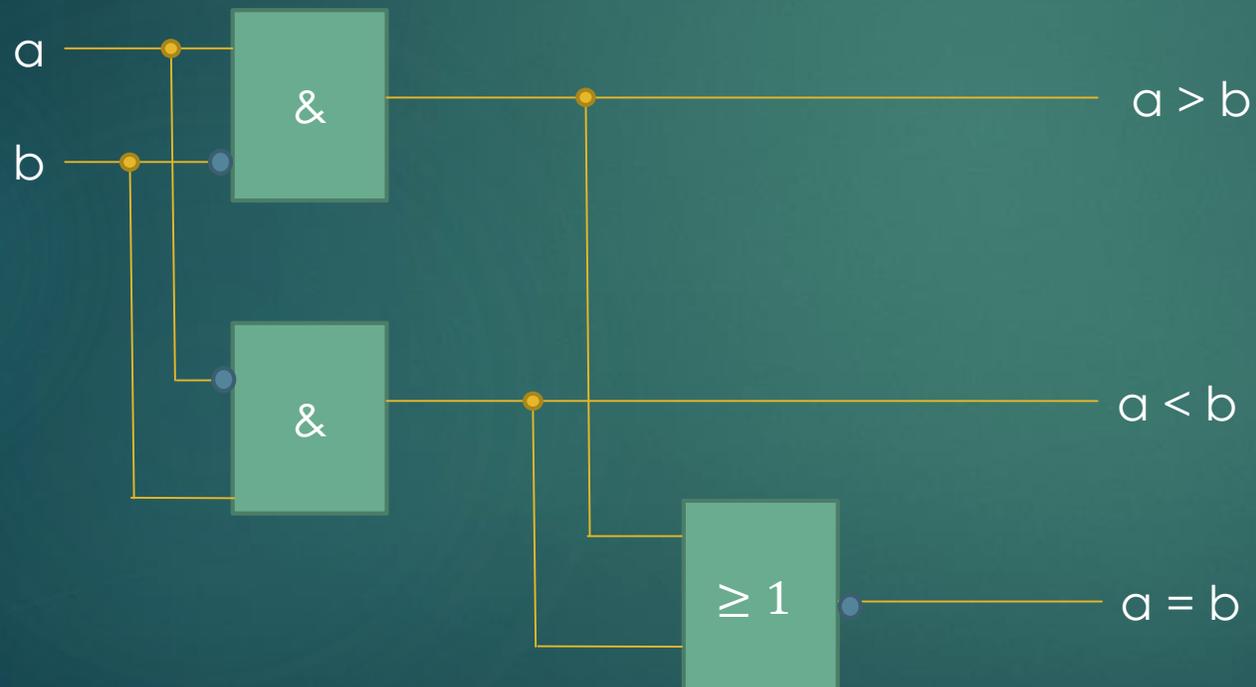
$$f_{>} = a\bar{b}$$

# Aufgabe 1 – Komparator

5

## ► Gatterumsetzung

$$f_{<} = \bar{a}b \quad f_{=} = \bar{a}\bar{b} + ab = \overline{a \otimes b} = a \text{ xnor } b \quad f_{>} = a\bar{b}$$



# Aufgabe 1 – Komparator

6

## Beschreibung

- ▶ Entwerfen Sie nun eine digitale Schaltung, deren Eingänge die Ausgänge  $K_0 = (<_0, >_0, =_0)$  und  $K_1 = (<_1, >_1, =_1)$  zweier Komparatoren sind und die diese *lexikographisch* auf die Ausgabe  $(<, >, =)$  reduziert. Dabei soll  $K_0$  nieder- und  $K_1$  höherwertig sein.
- ▶ Hinweis: wie würde man das schriftlich rechnen?

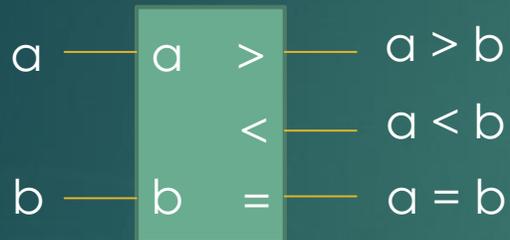
# Aufgabe 1 – Komparator

## Blackbox:

- ▶ Um wiederkehrende Bauelement nicht jedes Mal auf Grund auf neu implementieren zu müssen, fügt man eine abstrahierte Blackbox des Bauelementes in die Schaltung ein
- ▶ Diese definiert sich nur noch über ihre Ein- und Ausgänge. Das Verhalten ist aus der Schaltung nicht mehr direkt ersichtlich.
- ▶ Beispiele dieser Abstrahierung:
  - ▶ Flipflops
  - ▶ (De-) Multiplexer
  - ▶ Komparator
  - ▶ Schieberegister

# Aufgabe 1 – Komparator

Blackbox des Komparators:



$$\begin{aligned} > (K_1, K_0) &= (>_1) + (=1) \cdot (>_0) \\ < (K_1, K_0) &= (<_1) + (=1) \cdot (<_0) \\ = (K_1, K_0) &= (=1) \cdot (=0) \end{aligned}$$

Verhalten bei einer Zweibitzahl:

$$A = a_1a_0 \text{ und } B = b_1b_0$$

Der Wert der einzelnen Bits sinkt von links nach rechts, wobei jedes Bit vom Betrag her größer ist als alle seine rechten Nachbarn zusammen. Ist ein Bit von A kleiner als von B, so ist A auch insgesamt kleiner als B, wenn die Bits links von diesen identisch bzw. auch kleiner sind.

# Aufgabe 1 – Komparator

Verhalten bei einer Zweibitzzahl:

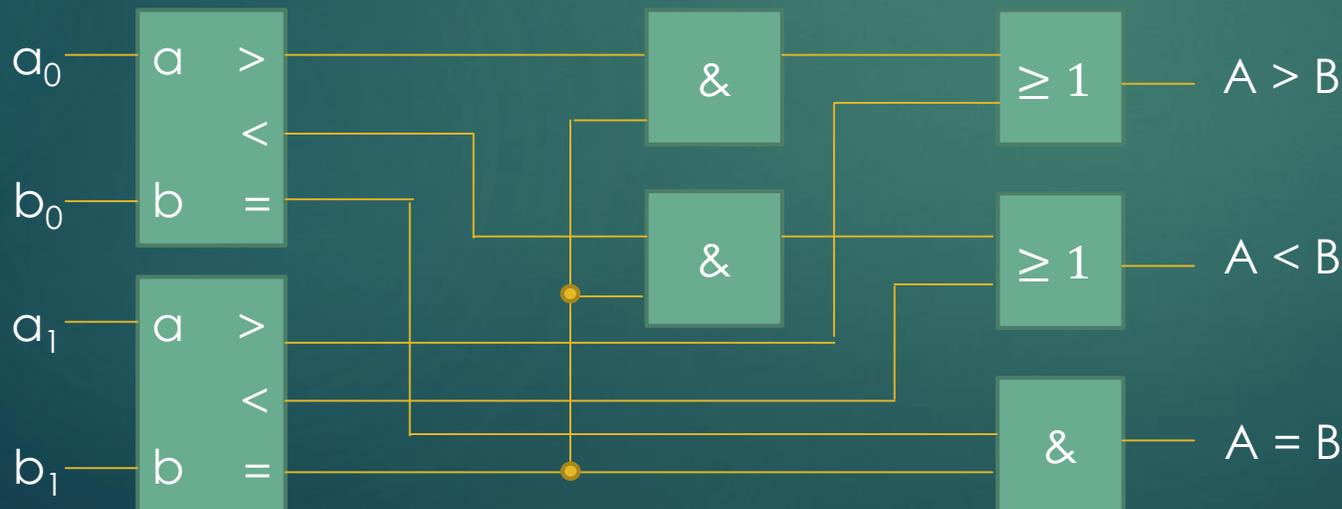
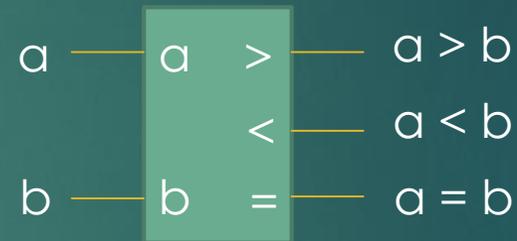
$$A = a_1a_0 \text{ und } B = b_1b_0$$

Also (beginnend von links):

$$a > b: (a_1 > b_1) \text{ oder } (a_1 = b_1) \text{ und } (a_0 > b_0)$$

$$a = b: (a_1 = b_1) \text{ und } (a_0 = b_0)$$

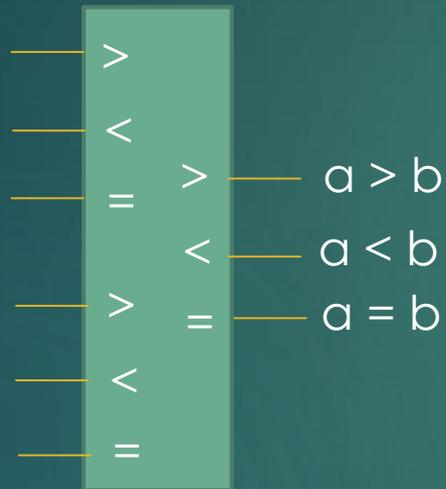
$$a < b: (a_1 < b_1) \text{ oder } (a_1 = b_1) \text{ und } (a_0 < b_0)$$



# Aufgabe 1 – Komparator

10

Blackbox des 2-Bit-Komparators:



Verhalten bei einer Vierbitzahl:

$A = a_3 \dots a_0$  und  $B = b_3 \dots b_0$

Wir benutzen zwei 2-Bit-Komparatoren ( $a_{32}, b_{32}$ ) und ( $a_{10}, b_{10}$ ), da auch hier von links nach rechts verglichen werden muss. Somit gleicht die Auswertung der des 1-Bit-Komparators.

# Aufgabe 1 – Komparator

11

## Beschreibung

- ▶ Die Schaltung aus a) und b) wird nun als 'Black-Box' mit den Eingängen a und b und den Ausgängen '<', '>' und '=' betrachtet.
- ▶ Entwerfen Sie ausschließlich mit diesen Komponenten einen Komparator für vorzeichenlose 4-Bit-Binärzahlen. Welche Möglichkeiten gibt es, die Komponenten zusammenschalten, und welche Auswirkungen hat dies auf die benötigte Fläche und den kritischen Pfad?
- ▶ Hinweis: wie würde man das schriftlich rechnen?

# Aufgabe 1 – Komparator

Verhalten bei einer Vierbitzahl:

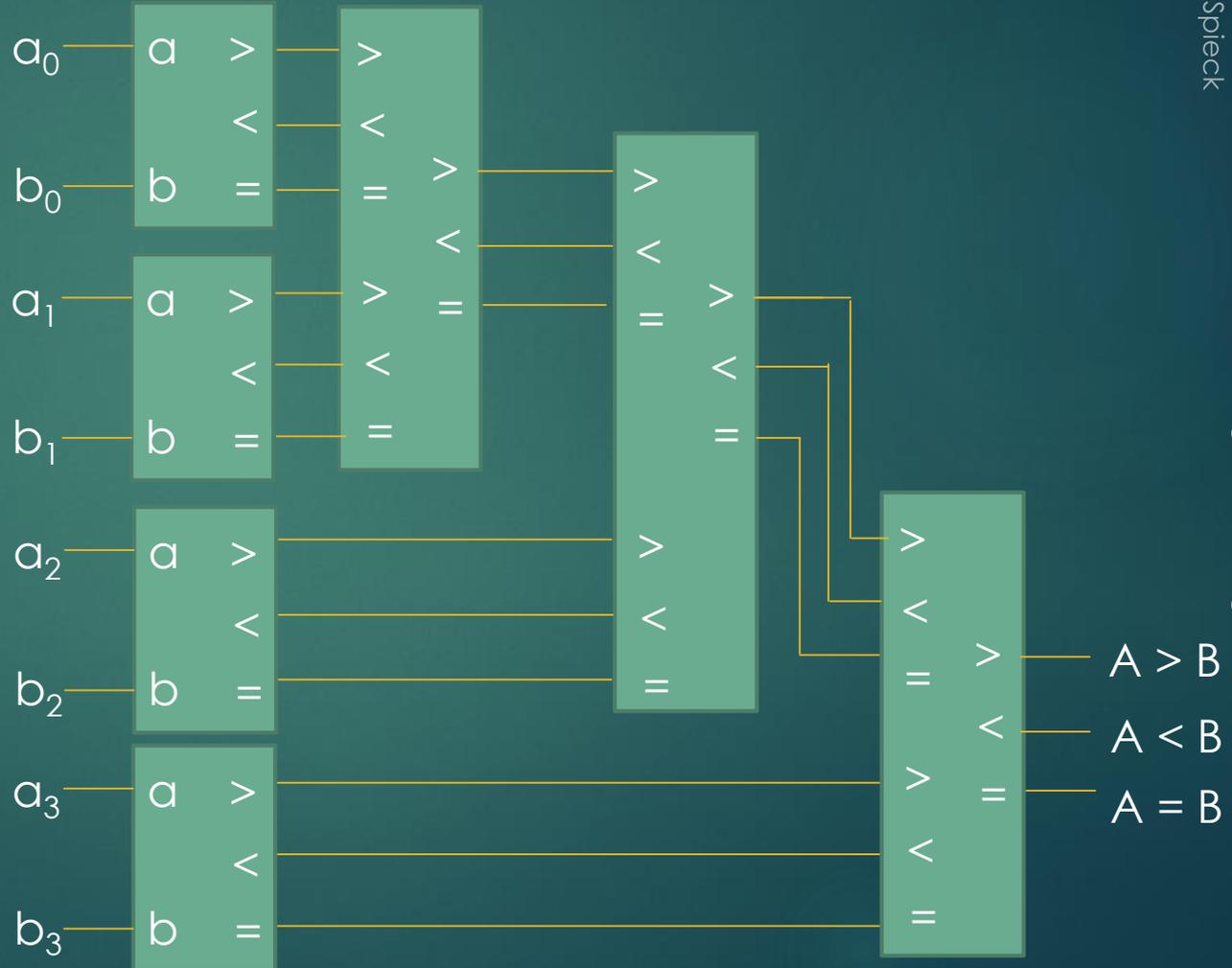
$A = a_3 \dots a_0$  und  $B = b_3 \dots b_0$

$a > b$ :  $(a_{32} > b_{32})$  oder  
 $(a_{32} = b_{32}) (a_{10} > b_{10})$

$a = b$ :  $(a_{32} = b_{32})$  und  
 $(a_{10} = b_{10})$

$a < b$ :  $(a_{32} < b_{32})$  oder  
 $(a_{32} = b_{32}) (a_{10} < b_{10})$

Lineare Lösung



# Aufgabe 1 – Komparator

Verhalten bei einer Vierbitzahl:

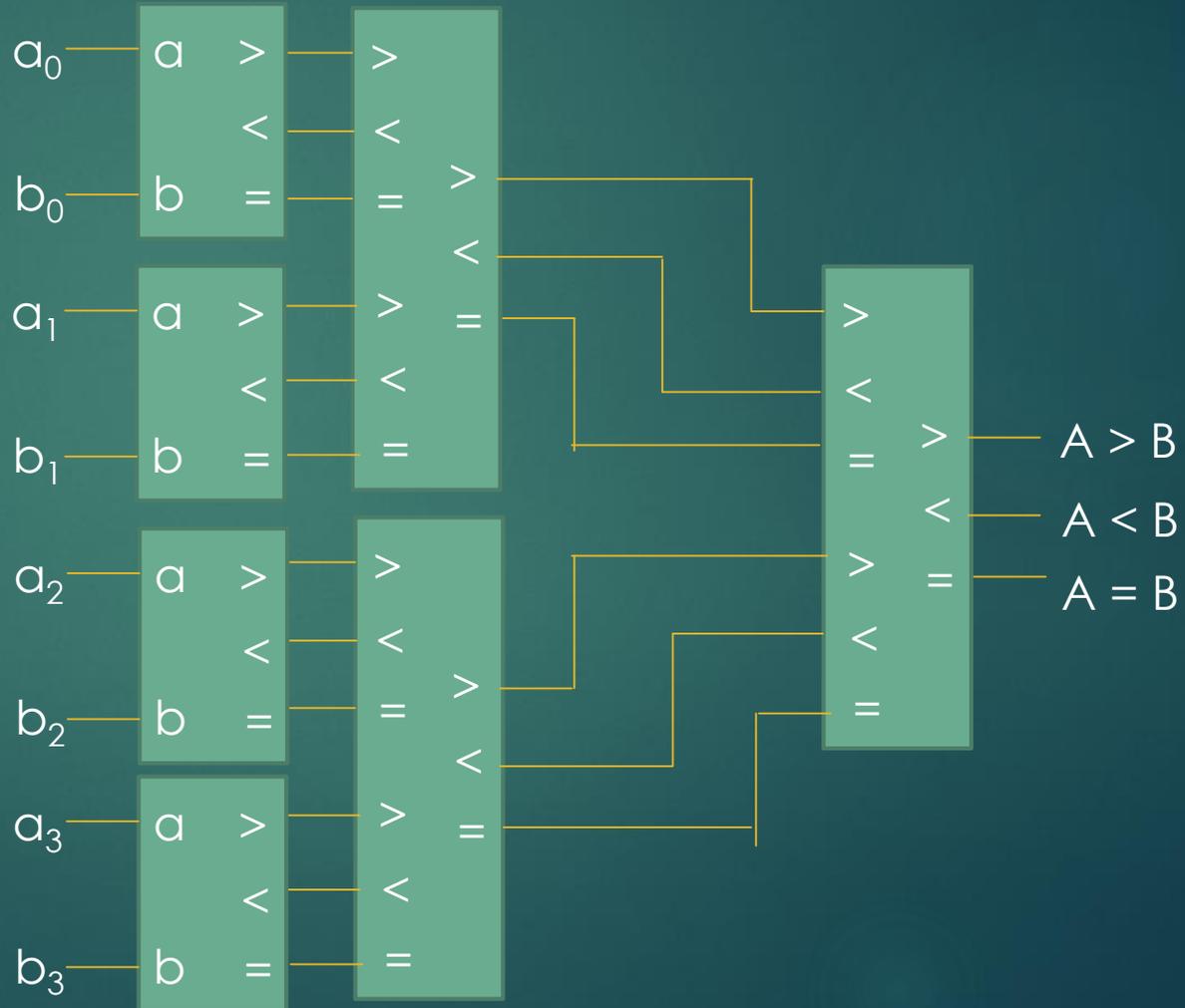
$A = a_3 \dots a_0$  und  $B = b_3 \dots b_0$

$a > b$ :  $(a_{32} > b_{32})$  oder  
 $(a_{32} = b_{32}) (a_{10} > b_{10})$

$a = b$ :  $(a_{32} = b_{32})$  und  
 $(a_{10} = b_{10})$

$a < b$ :  $(a_{32} < b_{32})$  oder  
 $(a_{32} = b_{32}) (a_{10} < b_{10})$

Baumartige Lösung



# Aufgabe 1 – Komparator

14

- ▶ Welche Möglichkeiten gibt es, die Komponenten zusammenzuschalten, und welche Auswirkungen hat dies auf die benötigte Fläche und den kritischen Pfad?

## Lineares Zusammenschalten:

- Allgemein  $n-1$  Stufen
- Kritischer Pfad steigt linear  $O(n)$  an

## Baumartiges Zusammenschalten:

- Allgemein  $\lceil \log_2 n \rceil$  Stufen
- Kritischer Pfad steigt logarithmisch  $O(\log n)$  an (VORTEIL!)

Die Fläche der beiden Lösungen ist hingegen identisch!

# Aufgabe 2 – Addierer/Subtrahierer

15

## Beschreibung

- ▶ Realisieren Sie einen Halbaddierer mit Hilfe von NAND-Gattern.
- ▶ Realisieren Sie einen Volladdierer ebenfalls mit Hilfe von NAND-Gattern.
- ▶ Bestimmen Sie jeweils die Anzahl der verwendeten Gatter und die Anzahl der Gatter des kritischen Pfades.

# Aufgabe 2 – Addierer/Subtrahierer

- ▶ Realisieren Sie einen Halbaddierer mit Hilfe von NAND-Gattern.

**Halbaddierer:**  $a + b = s$  mit  $c$

- S: Summe der beiden Operanden
- C: Carry, d.h. der Übertrag

a		b		S	c
0	+	0	=	0	0
0	+	1	=	1	0
1	+	0	=	1	0
1	+	1	=	0	1

$$s = a \oplus b$$

$$c = ab$$

# Aufgabe 2 – Addierer/Subtrahierer

17

## ► Nandisierung der Funktionen

$$s = a \otimes b = a\bar{b} + \bar{a}b \quad | \text{ Doppelnegation}$$

$$= \overline{\overline{a\bar{b}} + \overline{\bar{a}b}} \quad | \text{ De Morgan}$$

$$= \overline{\overline{a\bar{b}}} \overline{\overline{\bar{a}b}}$$

$$c = ab = \overline{\overline{ab}}$$

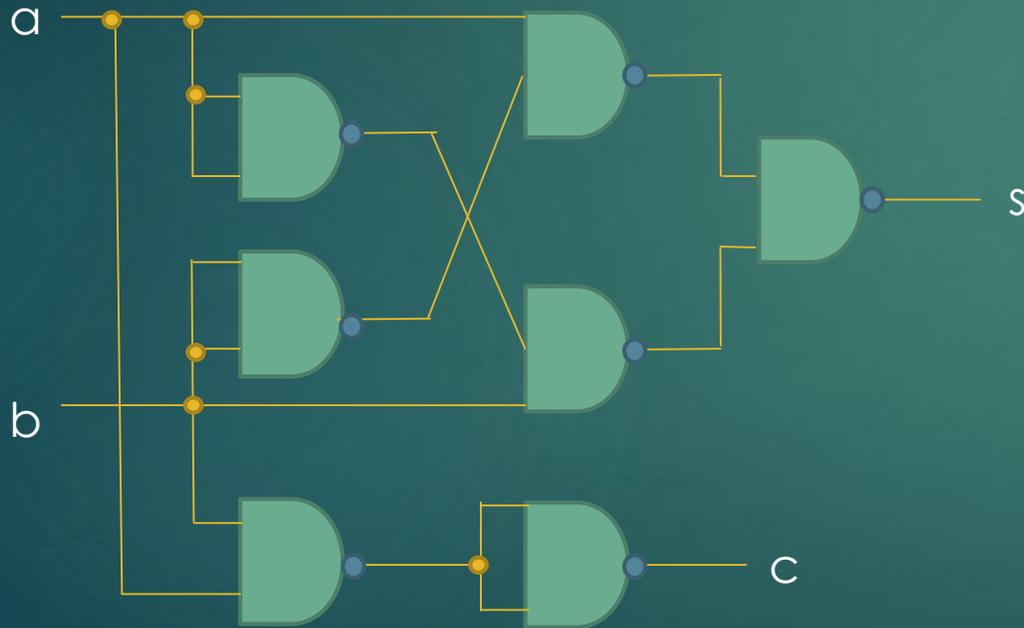
# Aufgabe 2 – Addierer/Subtrahierer

18

## ► Gatterumsetzung

$$s = \overline{\overline{a}b} \overline{\overline{a}1b} = \overline{\overline{a}bb} \overline{\overline{a}ab}$$

$$c = \overline{\overline{a}b1} = \overline{\overline{a}b} \overline{ab}$$



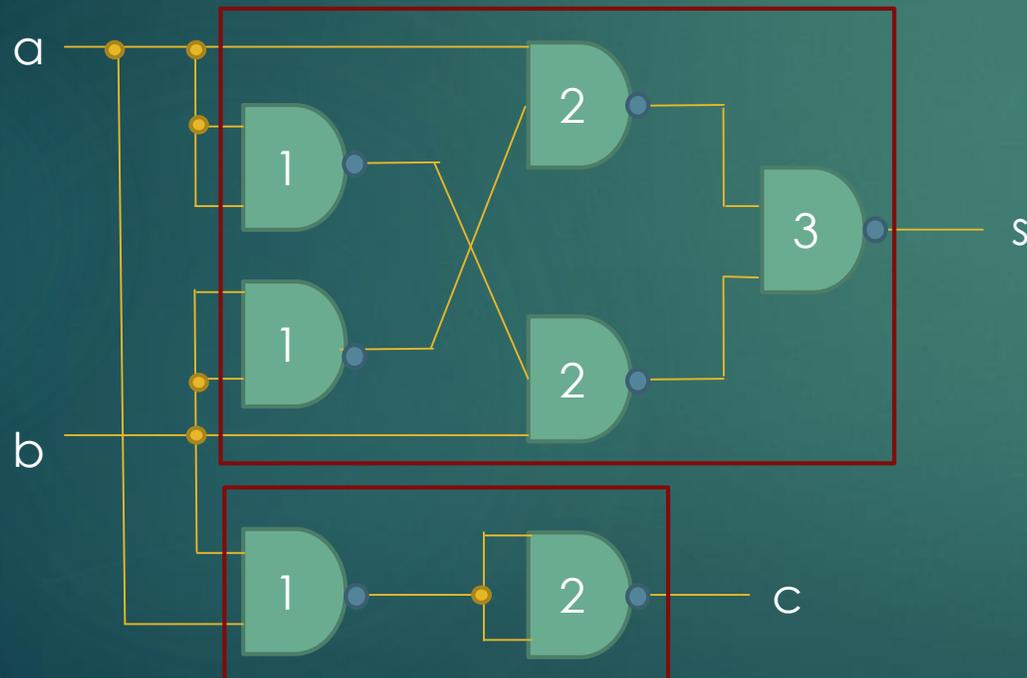
# Aufgabe 2 – Addierer/Subtrahierer

19

Gatteranzahl, Kritischer Pfad

Momentan: 7 Gatter

kritischer Pfad: 3 (Summe), 2 (Carry)



Kritischer Pfad:

Größtmöglicher Anzahl Gatter auf einem Pfad bis zu dem bestimmten Ausgang.

So beträgt der kritischer Pfad der Summe 3, da genau drei Gatter durchlaufen werden müssen, bis man zum Ausgang gelangt.

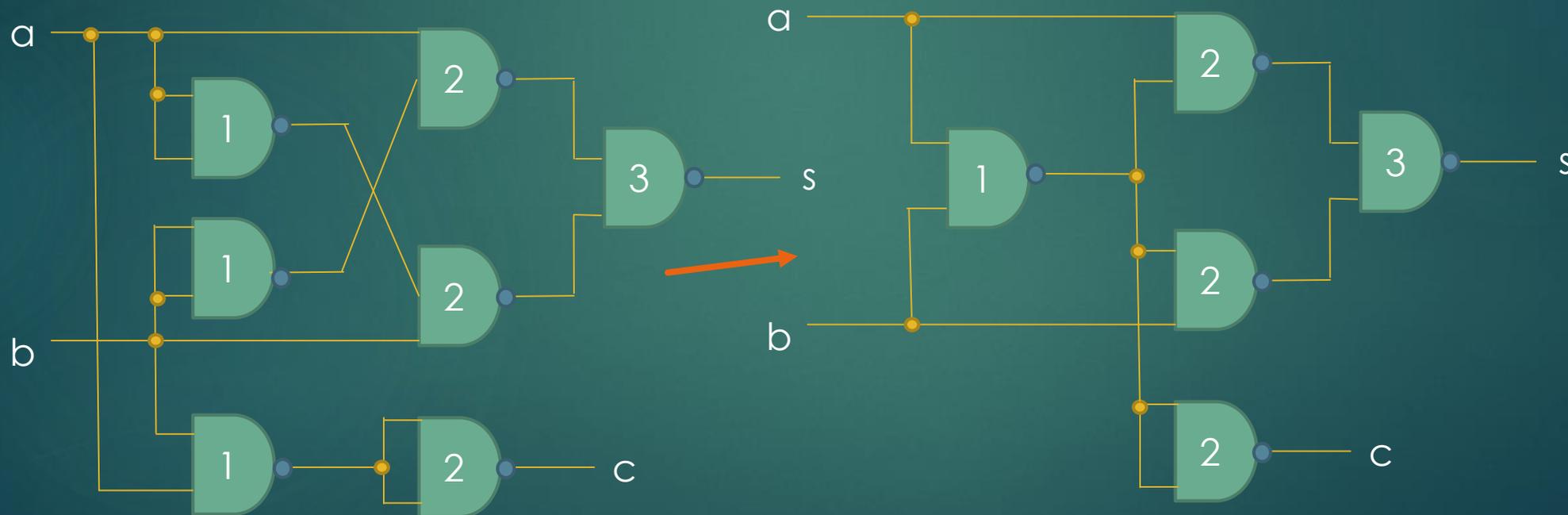
Der kritische Pfad ist ein Maß der Zeit, welche die Schaltung zur Auswertung der Funktion benötigt.

# Aufgabe 2 – Addierer/Subtrahierer

20

## ► Minimierung

Wir haben Summe und Carry getrennt verschaltet. Wenn wir die beiden Schaltungen verschmelzen, können wir uns zwei Gatter sparen.



# Aufgabe 2 – Addierer/Subtrahierer

21

- ▶ Realisieren Sie einen Volladdierer ebenfalls mit Hilfe von NAND-Gattern.

Wir nutzen dazu die Implementierung des Halbaddierers.

Dessen Blackbox, die wir hier leider nicht benutzen dürfen, sieht folgendermaßen aus:



Ein Volladdierer berücksichtigt im Gegensatz dazu ein Carrybit in der Eingabe.

Dessen Schaltbild sieht dann folgendermaßen aus:



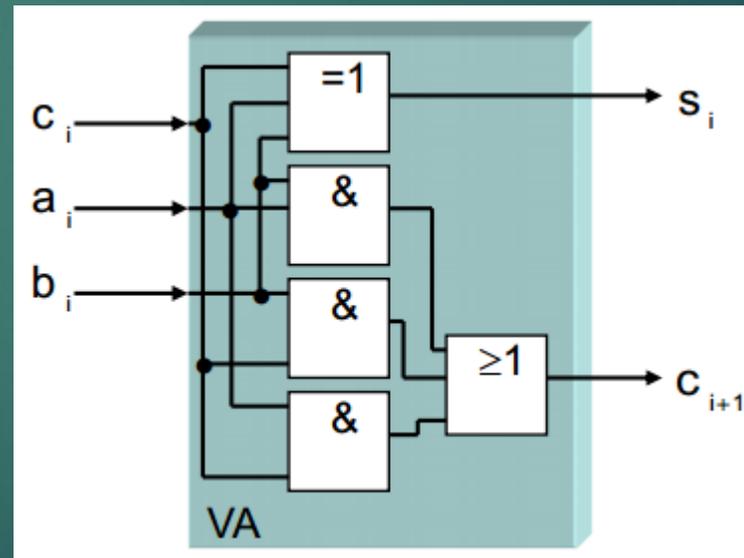
# Aufgabe 2 – Addierer/Subtrahierer

22

- Realisieren Sie einen Volladdierer ebenfalls mit Hilfe von NAND-Gattern.

Überlegen wir uns das gewünschte Verhalten (ohne NANDs):

a		b		c <sub>in</sub>	=	S	c <sub>out</sub>
0	+	0	+	0	=	0	0
0	+	1	+	0	=	1	0
1	+	0	+	0	=	1	0
1	+	1	+	0	=	0	1
0	+	0	+	1	=	1	0
0	+	1	+	1	=	0	1
1	+	0	+	1	=	0	1
1	+	1	+	1	=	1	1

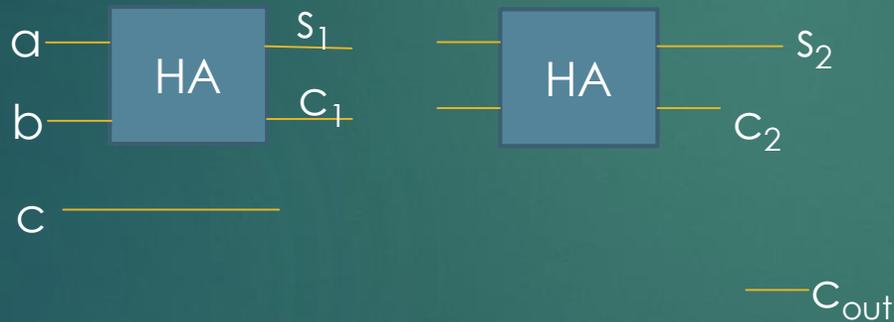


# Aufgabe 2 – Addierer/Subtrahierer

23

- ▶ Realisieren Sie einen Volladdierer ebenfalls mit Hilfe von NAND-Gattern.

Wir bilden das Problem des Volladdierers auf zwei Halbaddierer ab. Nun müssen wir uns überlegen, wie wir die Halbaddierer verkabeln müssen.



# Aufgabe 2 – Addierer/Subtrahierer

- Realisieren Sie einen Volladdierer ebenfalls mit Hilfe von NAND-Gattern.

Summenbildung:  $((a+b) + c_{in}) = \text{Summe}$ , d.h.  $s_1 + c_{in} = s_2$  (mit  $c_2$ )

$s_1$	$c_1$	$c_{in}$	=	$s_2$	$c_2$	$c_{out}$
0	0	0	=	0	0	0
1	0	0	=	1	0	0
0	1	0	=	0	0	1
0	0	1	=	1	0	0
1	0	1	=	0	1	1
0	1	1	=	1	0	1



H1



H2

Das Carry-Bit ist 1, wenn:

a, im ersten Halbaddierer 1 ist oder

b, im zweiten Halbaddierer 1 ist

# Aufgabe 2 – Addierer/Subtrahierer

25

- ▶ Realisieren Sie einen Volladdierer ebenfalls mit Hilfe von NAND-Gattern.

$$((a+b) + c_{in}) = \text{Summe}$$

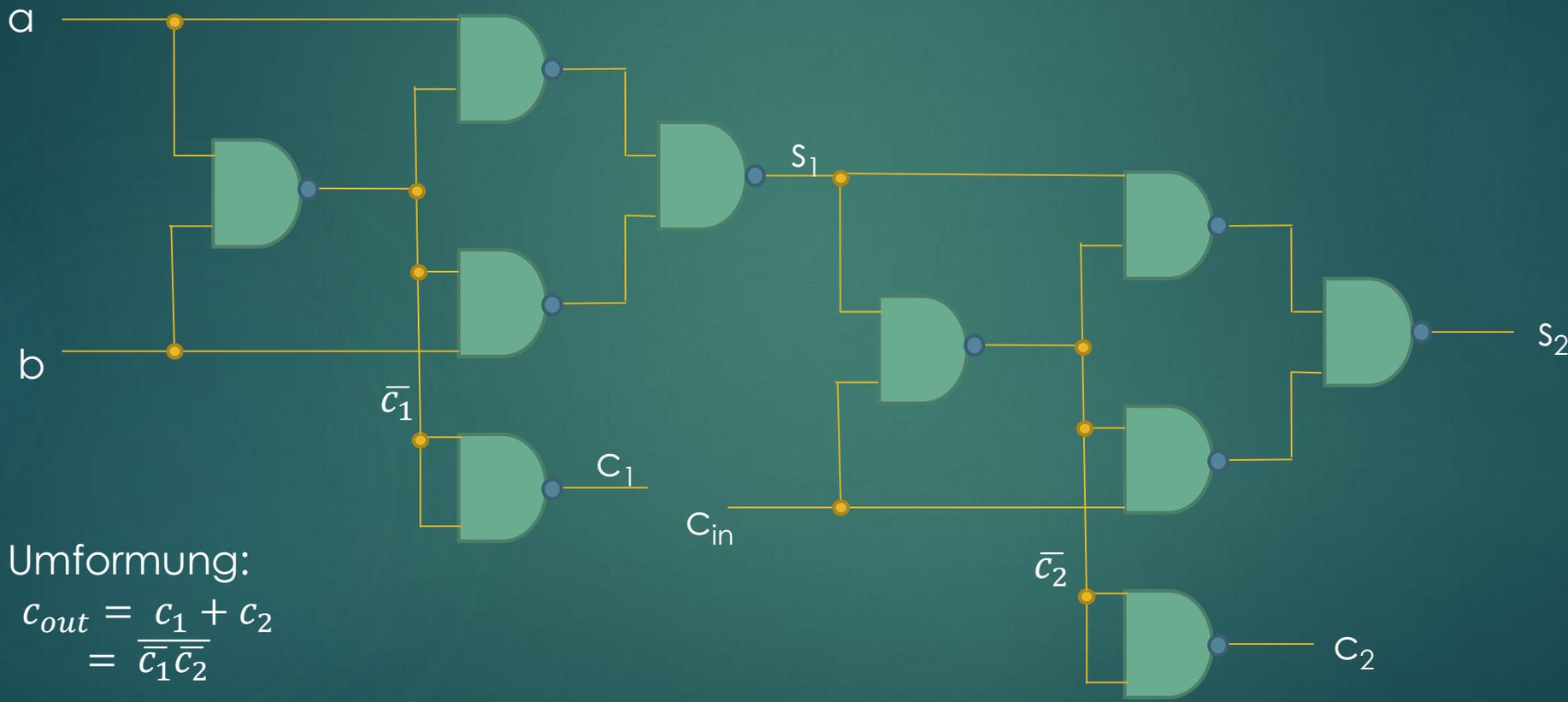
$$c_1 + c_2 = c_{out}$$



# Aufgabe 2 – Addierer/Subtrahierer

26

## ► NAND-Realisierung



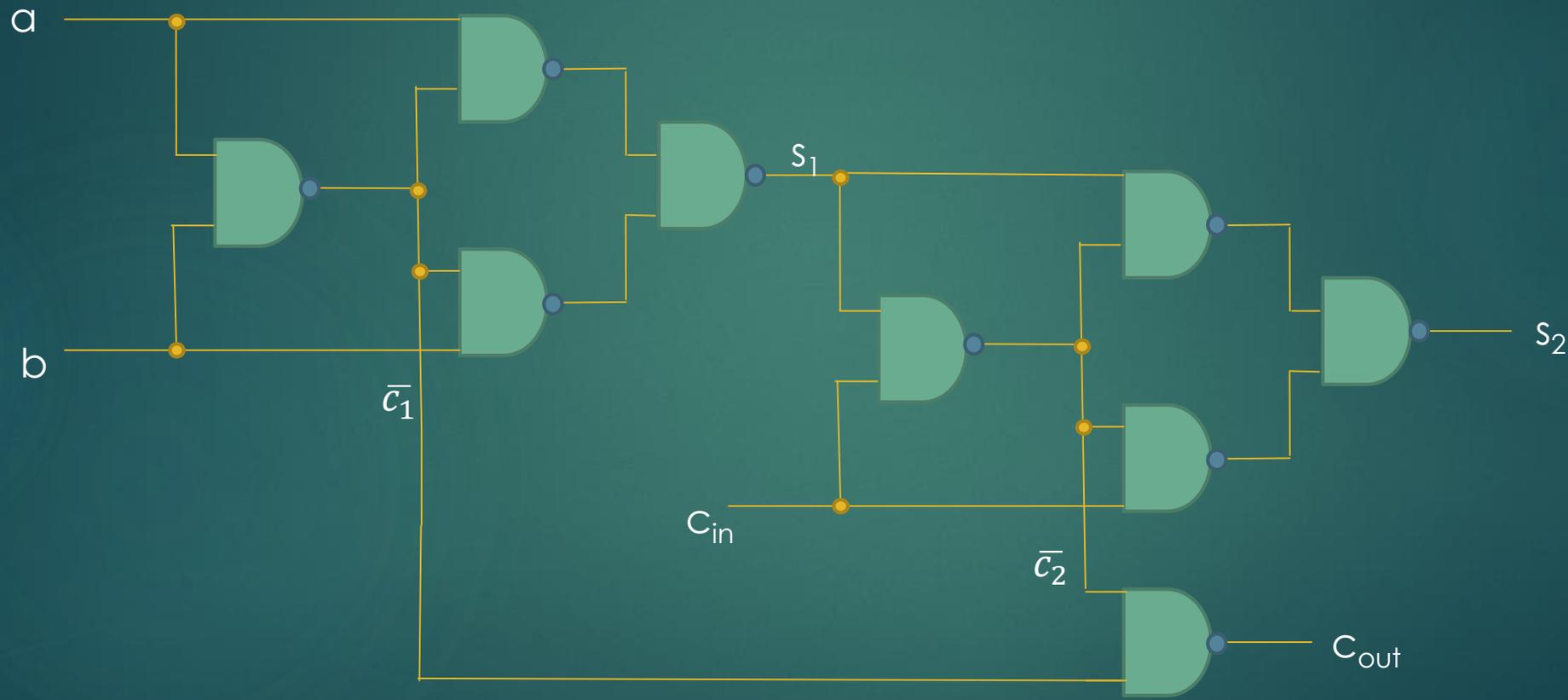
Umformung:

$$\begin{aligned} c_{out} &= c_1 + c_2 \\ &= \overline{\bar{c}_1 \bar{c}_2} \end{aligned}$$

# Aufgabe 2 – Addierer/Subtrahierer

27

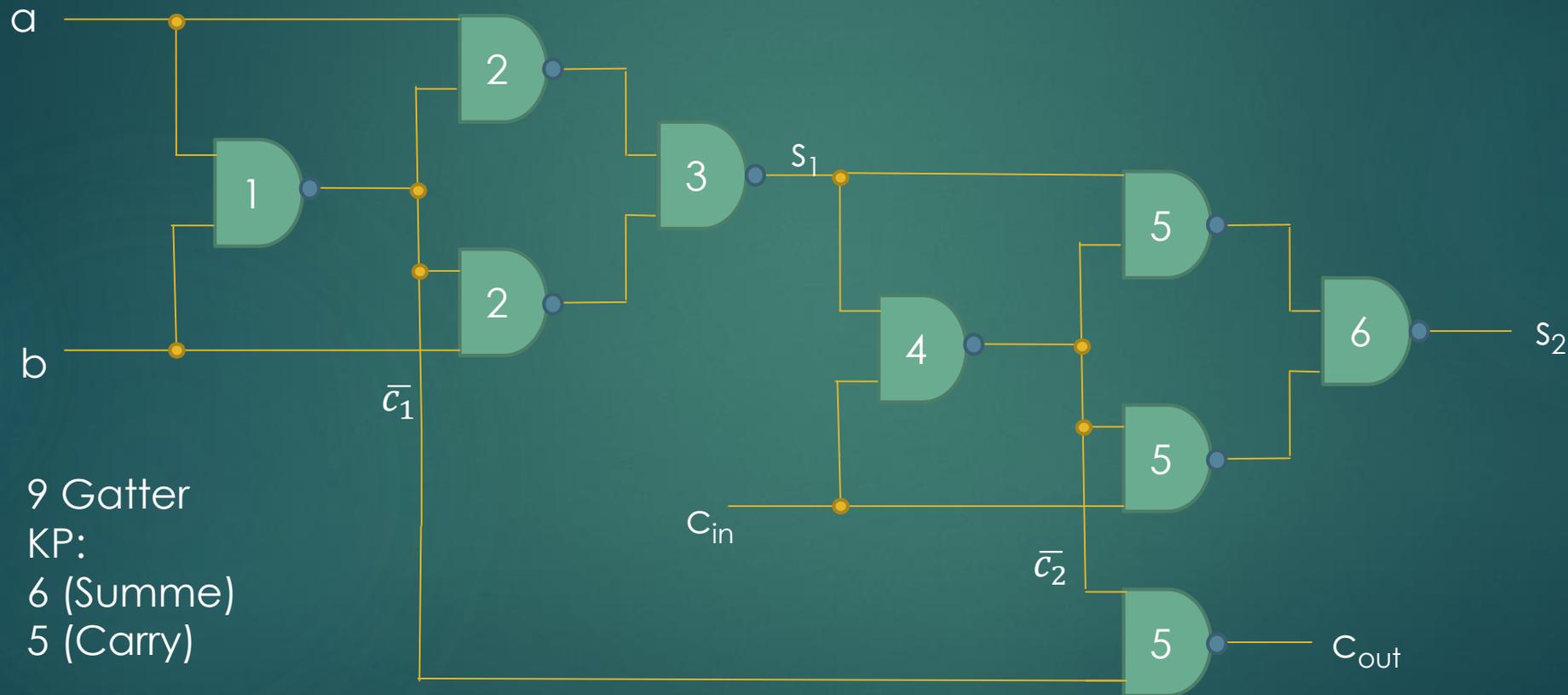
## ► NAND-Realisierung



# Aufgabe 2 – Addierer/Subtrahierer

28

## ► NAND-Realisierung



9 Gatter  
KP:  
6 (Summe)  
5 (Carry)

# Denkpause

29

Zwei Züge rasen mit 50 km/h auf einem Gleis direkt aufeinander zu. Sie sind zum Zeitpunkt 0 genau 100 km auseinander. Eine Biene sitzt auf einem der beiden Züge und fliegt zum Zeitpunkt 0 auf direkten geraden Weg los, um den anderen Zug zu erreichen. Da die Biene dem „The grass is always greener on the other side“-Syndrom unterliegt, fliegt sie beim Erreichen des anderen Zugs direkt wieder los, um auf den ursprünglichen Zug zu landen. Das wiederholt sie danach ewig so weiter, fliegt also immer von einem Zug zum anderen.

Wenn die Biene 90 km/h fliegt, wie viele Kilometer legt sie dann insgesamt zurück?



# Denkpause

30

Es dauert genau 1 Stunde bis beide Züge aufeinandertreffen ( $50 \text{ km/h} * 2$ ).

Die Biene fliegt konstant eine Stunde mit  $90 \text{ km/h}$ , also insgesamt  $90 \text{ km}$ !



# Aufgabe 2 – Addierer/Subtrahierer

31

## Beschreibung

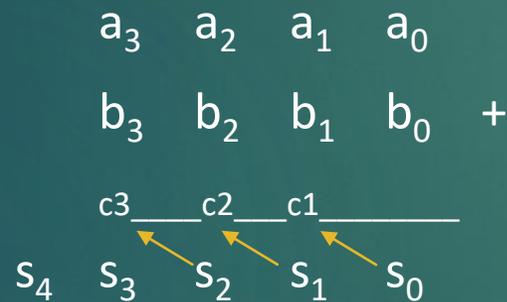
- ▶ Erstellen Sie aus den Volladdiererzellen aus a) einen Carry-Ripple-Addierer für 4-Bit breite Operanden ( $a_3 \dots a_0 + b_3 \dots b_0 + c_{in} = c_{out} s_3 \dots s_0$ ).
- ▶ Wie viele Gatter enthält nun der kritische Pfad des gesamten Schaltnetzes?

# Aufgabe 2 – Addierer/Subtrahierer

32

## Carry-Ripple-Addierer

- ▶ Carry: Übertrag, Ripple: Rieseln
- ▶ Mehrere kaskadierte Volladdierer, bei denen der Übertrag von einem Volladdierer zum nächsten weitergereicht wird
- ▶ Umsetzen des Schulprinzips zum Addieren zweier Zahlen A und B:

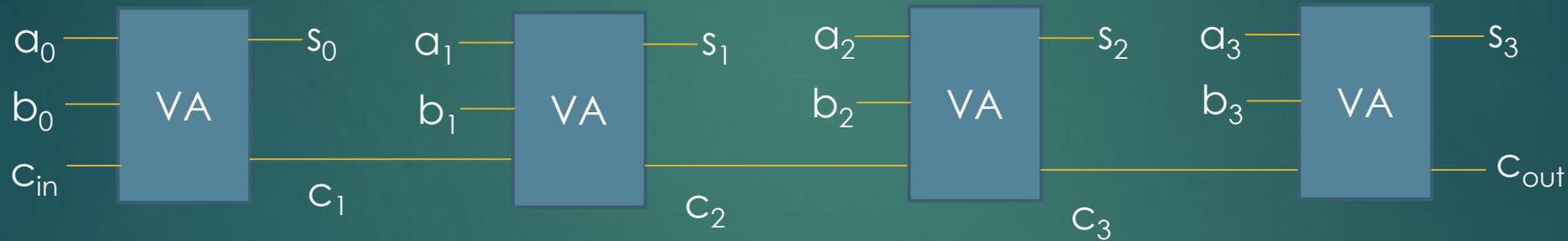


- ▶ Bei  $S_4$  handelt es sich um den Carry-Out
- ▶ Gerechnet wird also von rechts nach links

# Aufgabe 2 – Addierer/Subtrahierer

33

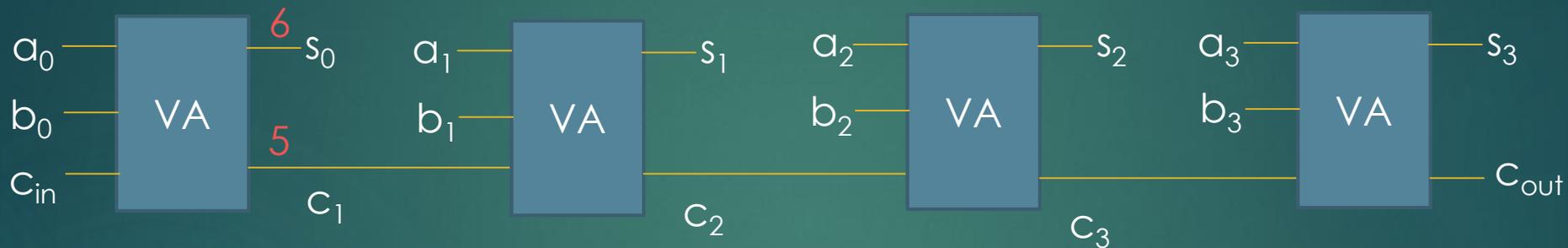
- ▶ Erstellen Sie aus den Volladdiererzellen aus a) einen Carry-Ripple-Addierer für 4-Bit breite Operanden ( $a_3 \dots a_0 + b_3 \dots b_0 + c_{in} = c_{out} s_3 \dots s_0$ ).



# Aufgabe 2 – Addierer/Subtrahierer

34

- ▶ Wie viele Gatter enthält nun der kritische Pfad des gesamten Schaltnetzes?



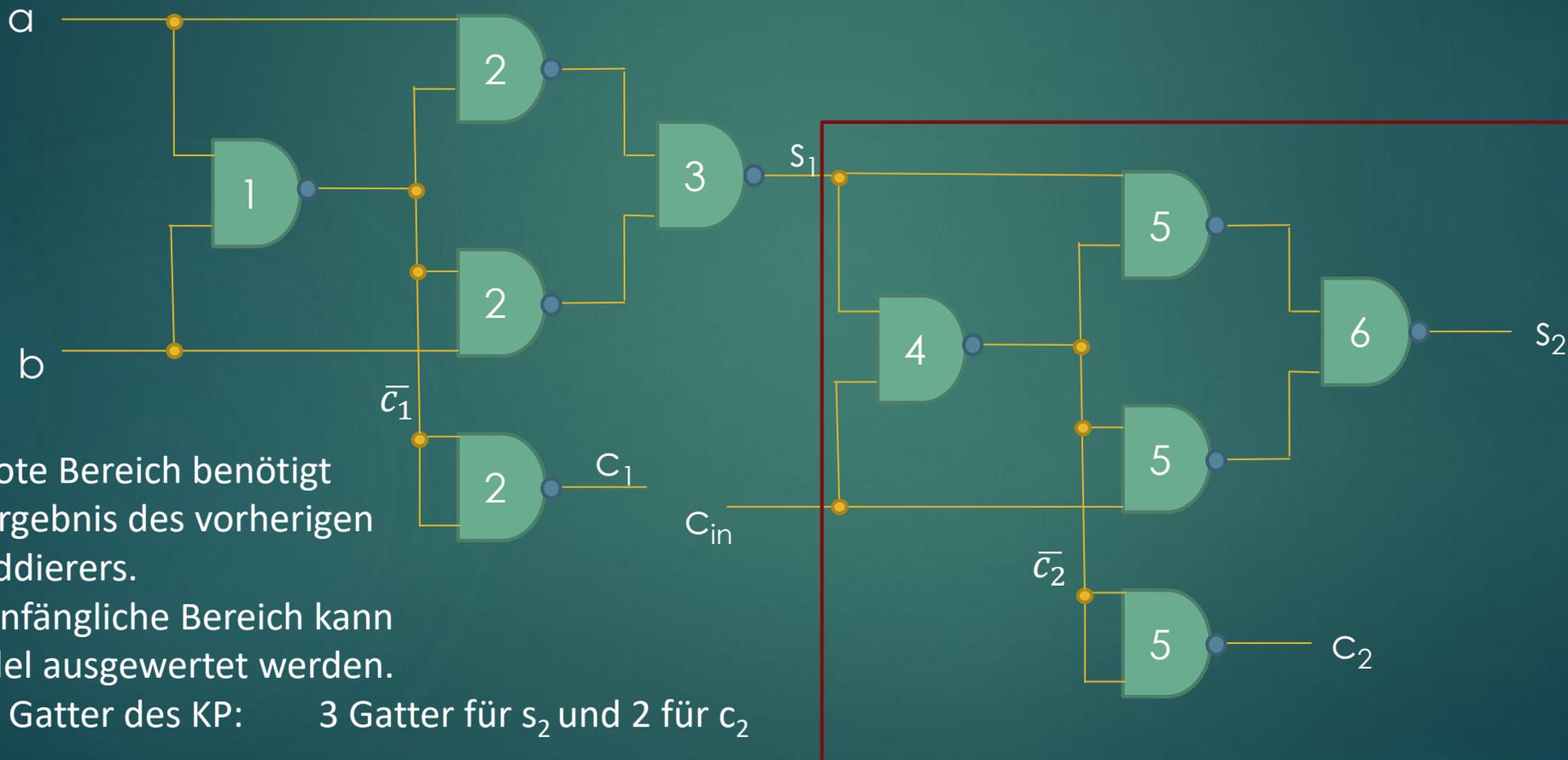
Zur Erinnerung der kritische Pfad eines VA: 6 (Summe) 5 (Carry)

1:  $s_0$  ist nach 6 Schritten ausgerechnet,  $c_1$  somit nach 5

# Aufgabe 2 – Addierer/Subtrahierer

35

Übersicht über den Volladdierer:



Der rote Bereich benötigt das Ergebnis des vorherigen Volladdierers.

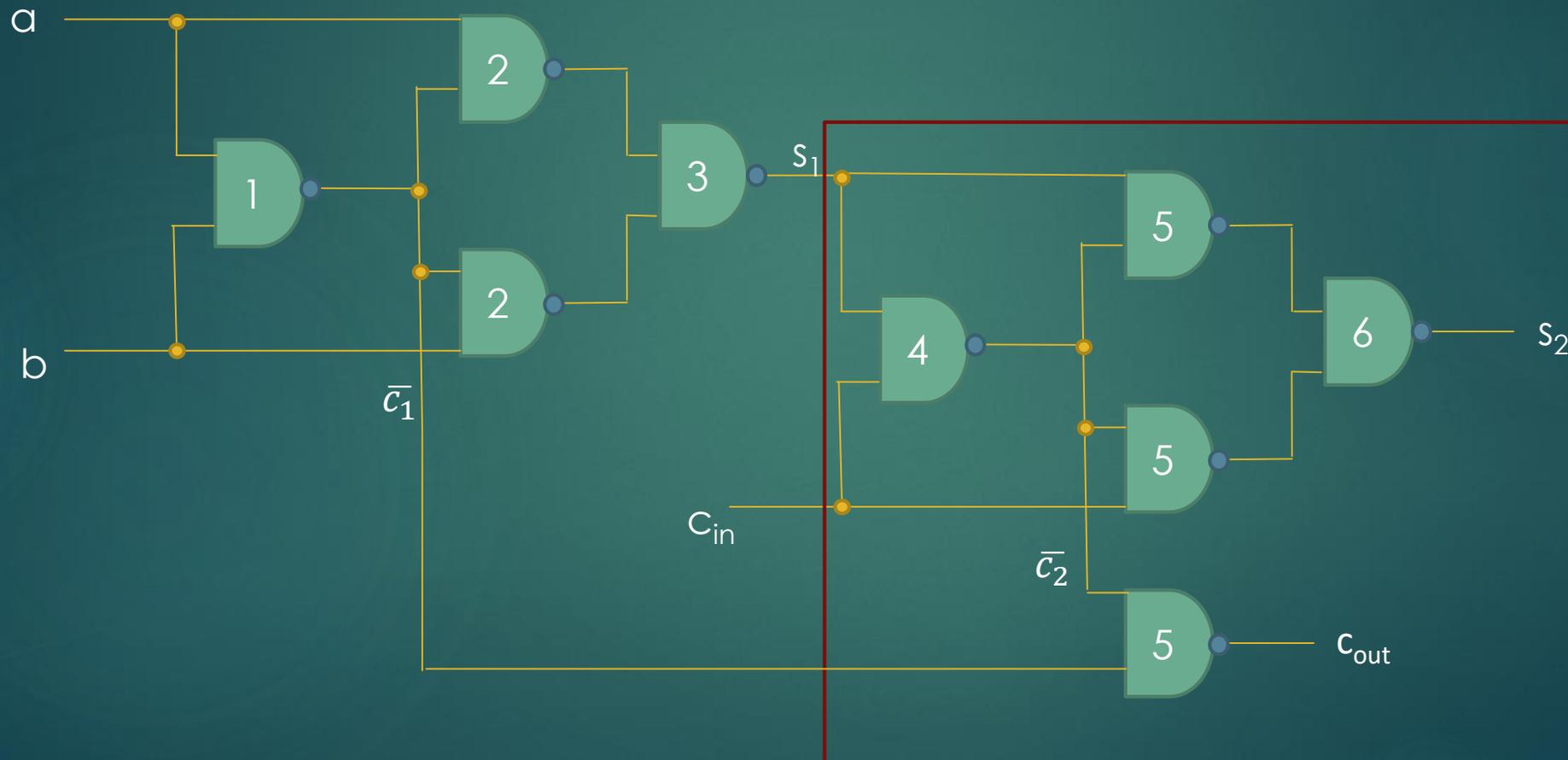
Der anfängliche Bereich kann parallel ausgewertet werden.

Neue Gatter des KP: 3 Gatter für  $s_2$  und 2 für  $c_2$

# Aufgabe 2 – Addierer/Subtrahierer

36

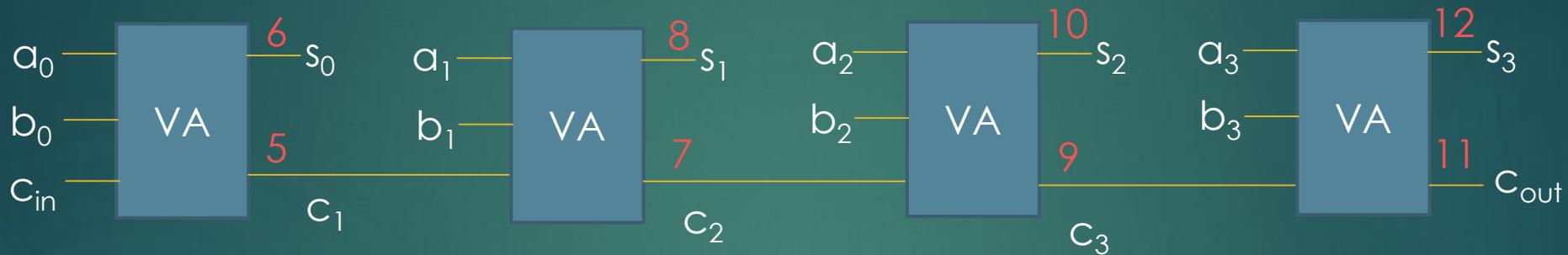
Berücksichtigung  $c_{out}$



# Aufgabe 2 – Addierer/Subtrahierer

37

- ▶ Wie viele Gatter enthält nun der kritische Pfad des gesamten Schaltnetzes?



Zur Erinnerung der kritische Pfad eines VA: 6 (Summe) 5 (Carry)

1:  $s_0$  ist nach 6 Schritten ausgerechnet,  $c_1$  somit nach 5

2:  $5 + 3 = 8$  für  $s_1$      $5 + 2 = 7$  für  $c_2$

3:  $7 + 3 = 10$  für  $s_2$      $7 + 2 = 9$  für  $c_3$

4:  $9 + 3 = 12$  für  $s_3$      $9 + 2 = 11$  für  $c_4$

# Aufgabe 2 – Addierer/Subtrahierer

38

## Beschreibung

- ▶ Der Addierer aus b) soll nun als Block betrachtet werden und so erweitert werden, dass er durch ein **zusätzliches Steuerbit Sub** auch **subtrahieren kann** (durch Umwandlung von B in das 1er-Komplement). Dazu stehen Ihnen beliebige Gatter zur Verfügung. Beachten Sie:
  - ▶ Erzeugung negativer Zahlen (Komplementierer)
  - ▶ Behandlung des Übertrags
  - ▶ Erkennung eines Überlaufs (Overflow)

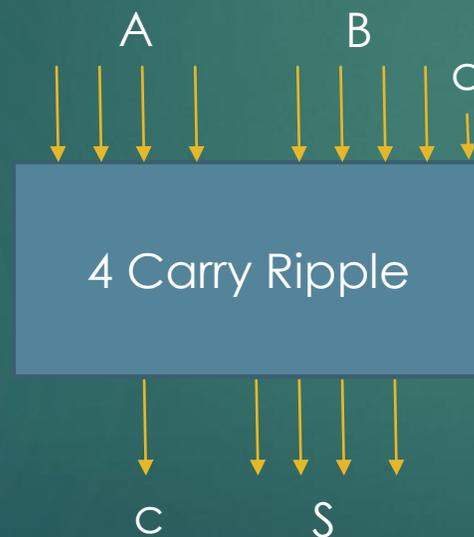
# Aufgabe 2 – Addierer/Subtrahierer

39

## Aufgaben:

- ▶ zusätzliches Steuerbit Sub
- ▶ Subtraktion durch Umwandlung von B in das 1er-Komplement

Blockschaltbild:





# Aufgabe 2 – Addierer/Subtrahierer

41

- ▶ Behandlung des Übertrags:

Einerkomplement: Null wird sowohl durch 0000, als auch 1111 dargestellt.

Beispiel der Subtraktion:  $4 (0100) - 3 (0011)$

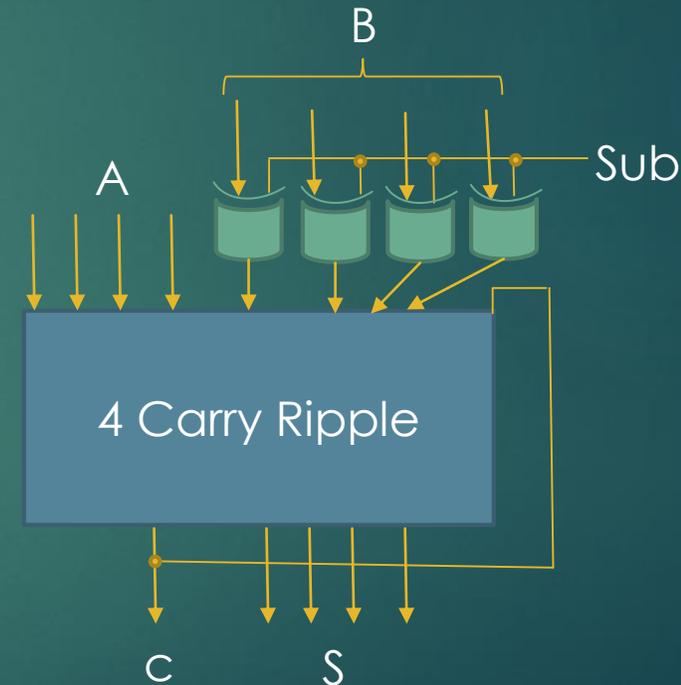
Einerkomplement (3):  $0011 \rightarrow 1100$

Addition:  $0100 + 1100 = 0000 C1$

Damit das Ergebnis stimmt muss das Carry wieder addiert werden  $0000 + 1 = 0001$ . Dies geschieht einen Takt später, indem es in den CRA zurückgeleitet wird

Name: **End-Around Carry, EAC**

Weiteres Beispiel:  $3 (0011) - 1 (0001) = 0011 + 1110 = 0001 C1$   $0001 + 1 = 0010$



# Aufgabe 2 – Addierer/Subtrahierer

42

- ▶ Behandlung des Überlaufs:

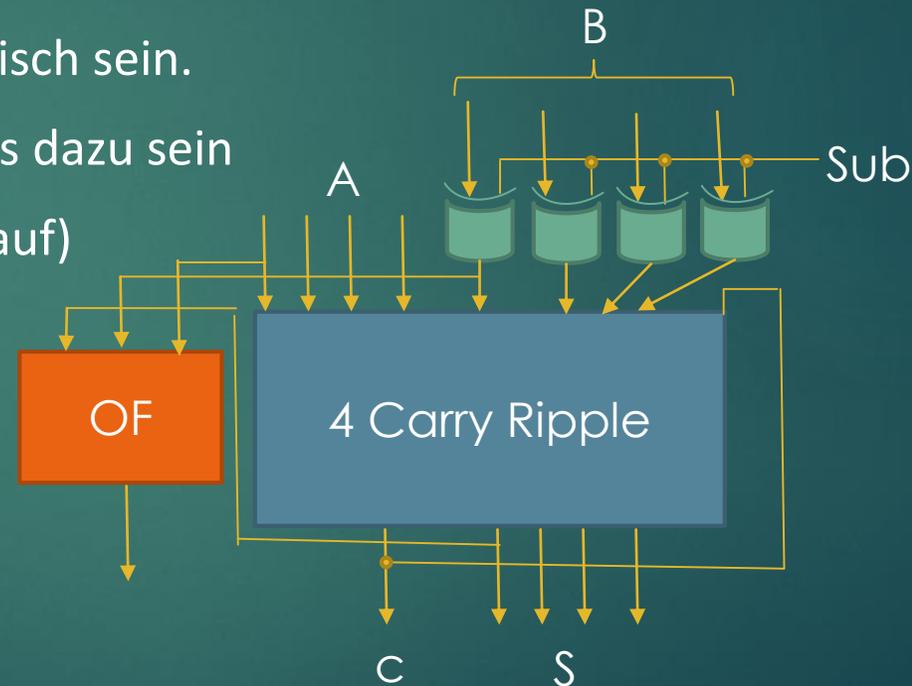
Wie erkennt man einen Überlauf (Overflow) bzw. Unterlauf:

1. Das Vorzeichen von A und B muss identisch sein.
2. Zusätzlich muss das Vorzeichenbit invers dazu sein

Beispiel:  $0|100 + 0|100 = 1|000$  (Überlauf)

Wie benötigen also das MSB von A und B, sowie das MSB vom Ergebnis S.

MSB = Most Significant Bit (ganz links)



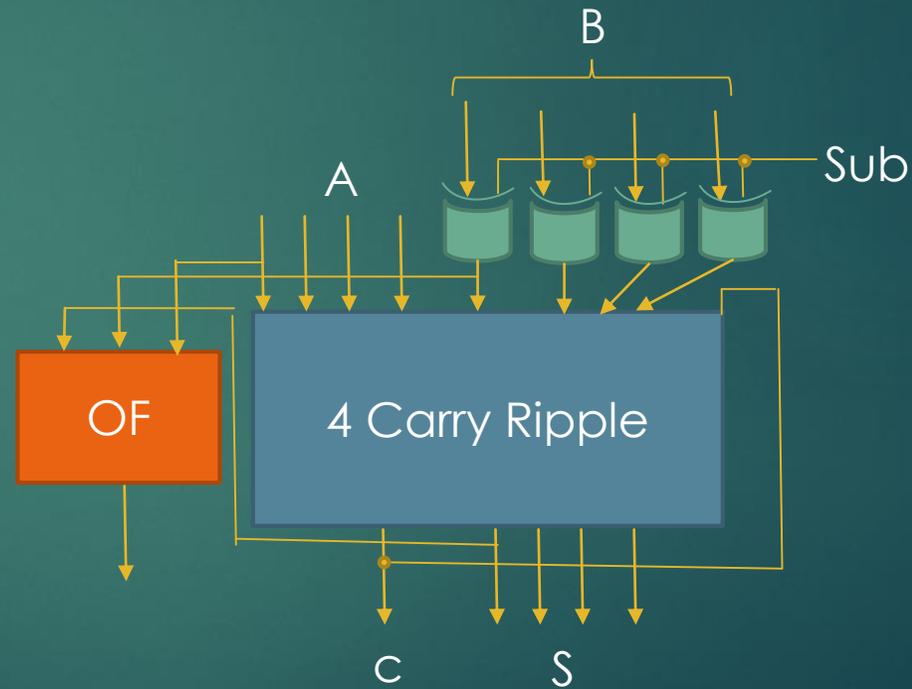
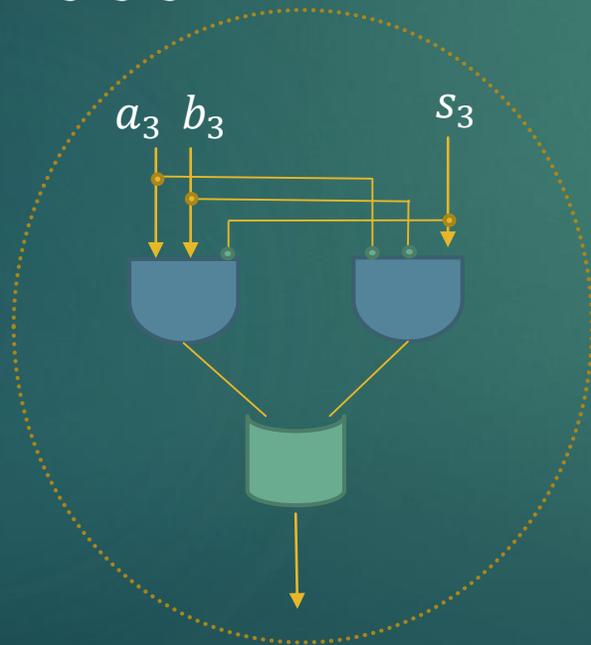
# Aufgabe 2 – Addierer/Subtrahierer

- ▶ Behandlung des Überlaufs:

Overflow: Vorzeichenbit identisch; MSB von S dazu invers

Bedingungen:

$$a_3 b_3 \bar{s}_3 + \bar{a}_3 \bar{b}_3 s_3$$



# Aufgabe 2 – Addierer/Subtrahierer

44

## Beschreibung

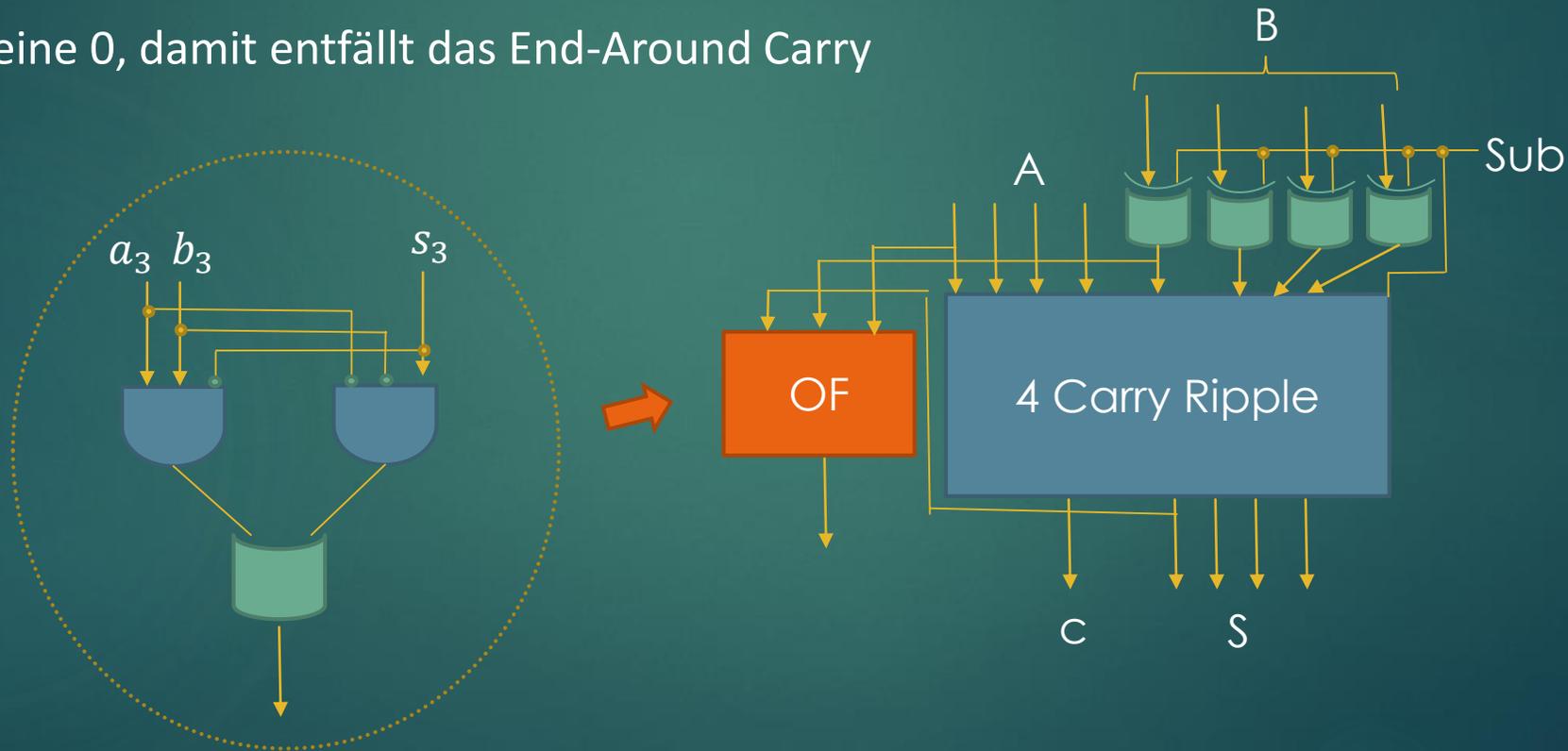
- ▶ Führen Sie den Schritt c) für eine Recheneinheit durch, die B in Abhängigkeit von Sub in das Zweierkomplement umwandelt.

**Hinweis:** Nur eine kleine Änderung!

# Aufgabe 2 – Addierer/Subtrahierer

45

- ▶ Unterschied des Zweierkomplements
  1. Zweierkomplement = Einerkomplement + 1, dazu nutzen wir den Carry Eingang. Das Sub-Bit ist sowieso 1, wenn subtrahiert wird, was wir ausnutzen
  2. Nur eine 0, damit entfällt das End-Around Carry



# Aufgabe 3 – MO - Addierer

## ► Beschreibung

In dieser Aufgabe soll ein Schaltnetz für die Addition von vier Summanden ( $u, v, w, x$ ) erstellt werden, das beispielsweise für die Addition von Teilprodukten eines Multiplizierers benutzt werden könnte.

		$u_3$	$u_2$	$u_1$	$u_0$	
+		$v_3$	$v_2$	$v_1$	$v_0$	
+		$w_3$	$w_2$	$w_1$	$w_0$	
+		$x_3$	$x_2$	$x_1$	$x_0$	
<hr/>						
	$s_5$	$s_4$	$s_3$	$s_2$	$s_1$	$s_0$

# Aufgabe 3 – MO - Addierer

## ► Beschreibung

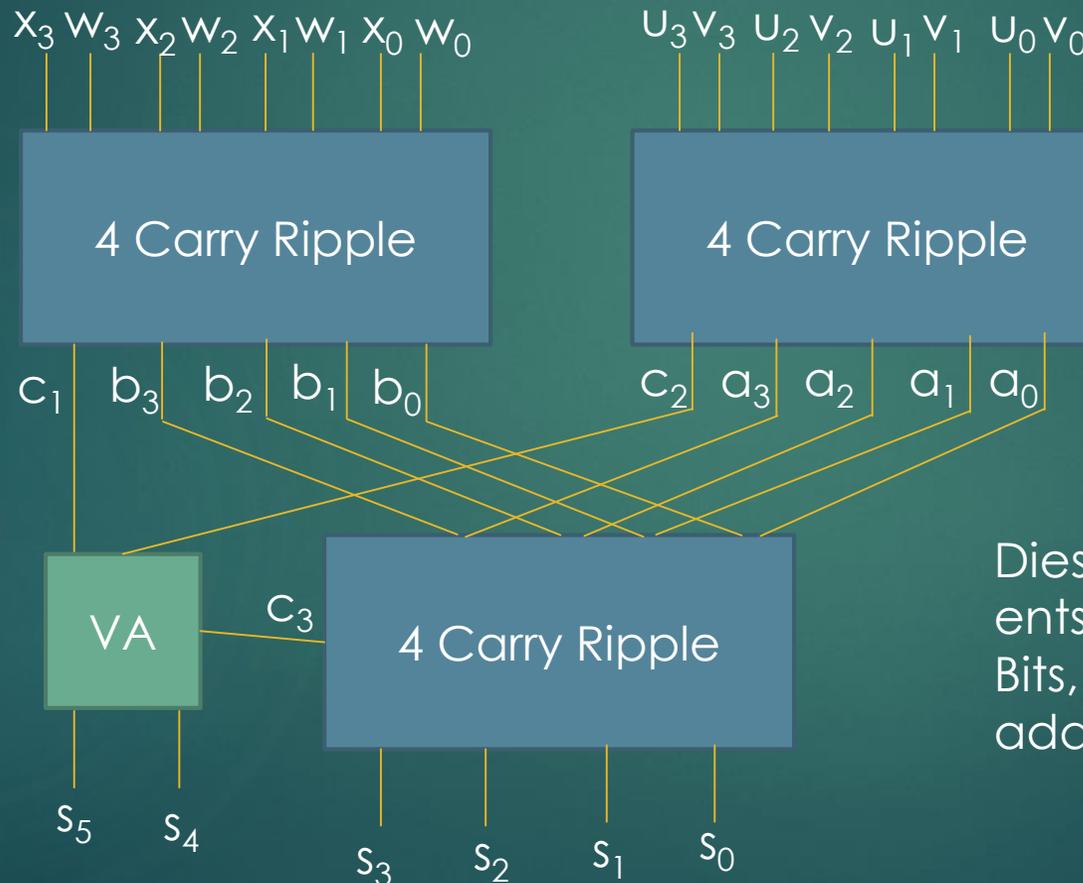
Eine mögliche Lösung besteht darin, zuerst  $u + v$  und  $w + x$  mit Hilfe je eines Carry-Ripple Addierers zu berechnen. Die Teilsummen werden dann baumartig zu dem Endergebnis zusammenaddiert.

Wie viele NAND-Gatterverzögerungszeiten umfasst dann der kritische Pfad minimal, wenn nur die in Aufgabe 2a) entworfenen Volladdierer verwendet werden dürfen?

			$u_3$	$u_2$	$u_1$	$u_0$
+			$v_3$	$v_2$	$v_1$	$v_0$
+			$w_3$	$w_2$	$w_1$	$w_0$
+			$x_3$	$x_2$	$x_1$	$x_0$
	$s_5$	$s_4$	$s_3$	$s_2$	$s_1$	$s_0$

# Aufgabe 3 – MO - Addierer

►  $U + v = a$     $x + w = b$     $a + b = s$



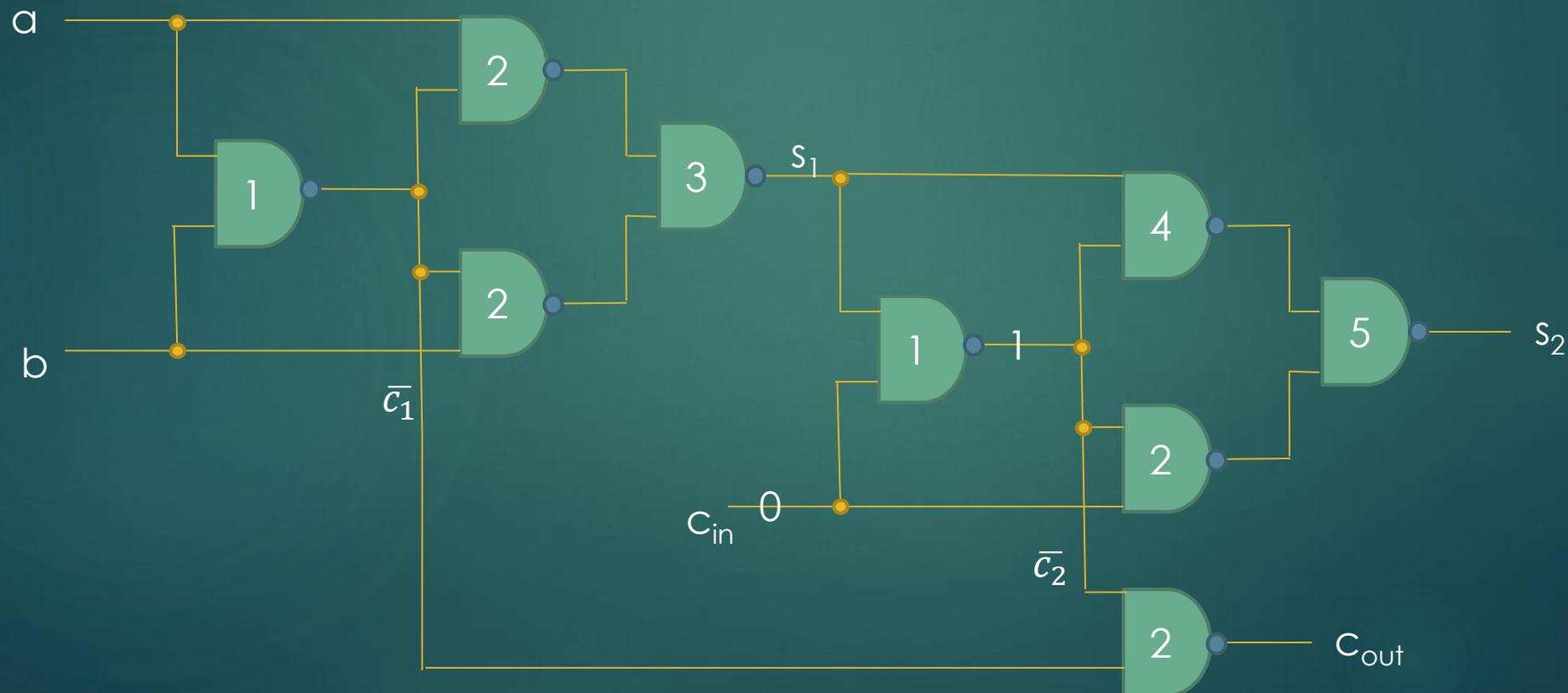
Diesmal achten wir auf den entstehende weitere Ergebnis-Bits, indem wir die Carries auch addieren

# Aufgabe 3 – MO - Addierer

49

## ► Kritischer Pfad

Durch Einleiten einer Null in den ersten Volladdierer (da noch kein Carry) verkürzt sich der kritische Pfad auf 5 bzw. 2. Da das NAND sofort den richtigen Wert annimmt, der sich in späteren Takten nicht mehr ändert, da eine einzige 0 ausreicht!

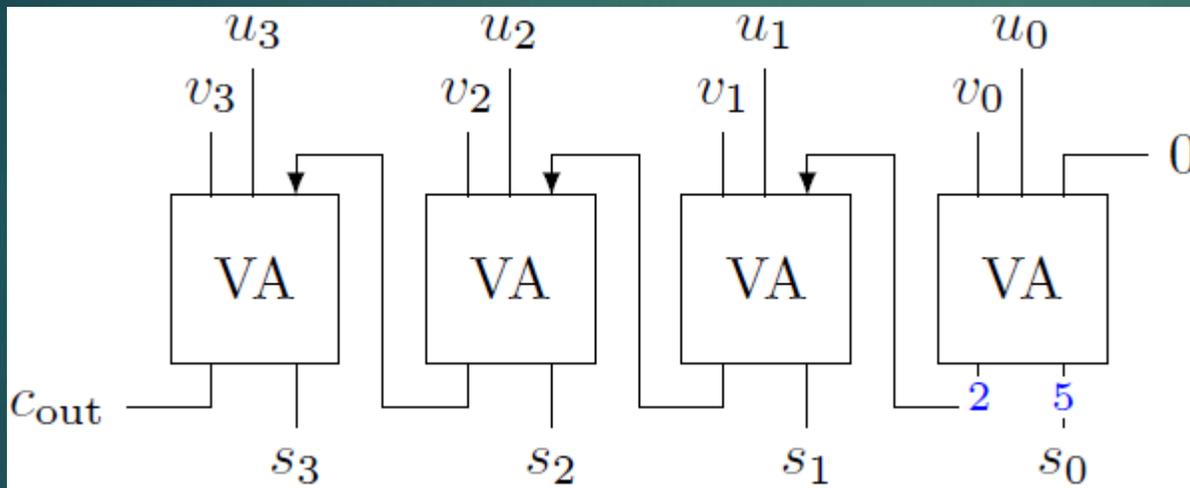


# Aufgabe 3 – MO - Addierer

50

- ▶ 4 Carry Ripple

Eingeleitete Null führt zur Ausgang 2 und 5.

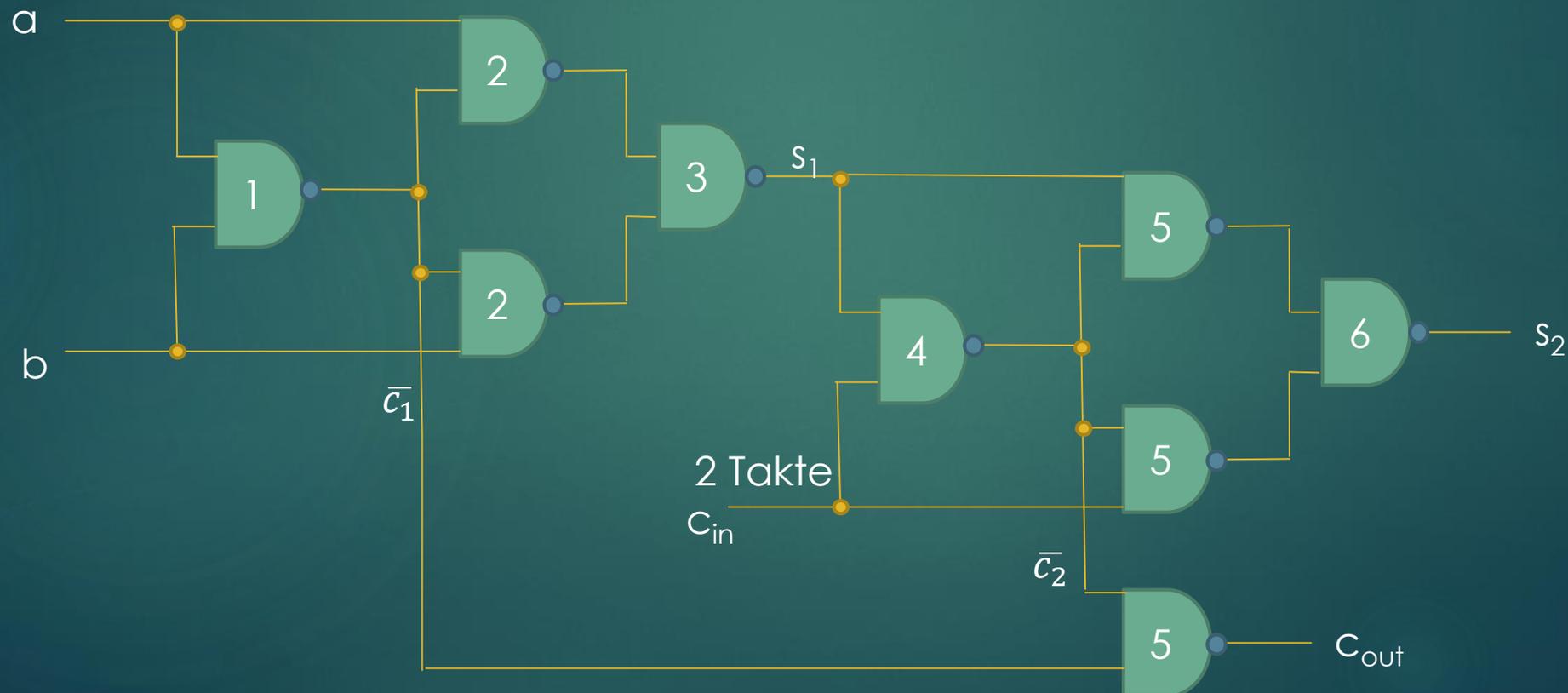


# Aufgabe 3 – MO - Addierer

51

## ► Kritischer Pfad

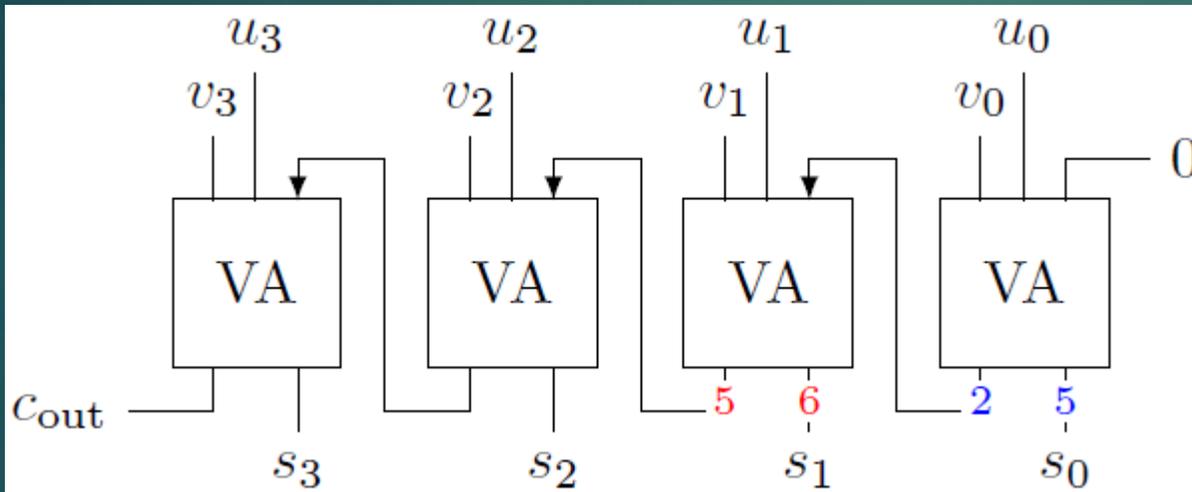
Im zweiten Schritt hilft uns die schnelle Auswertung von  $c_{in}$  nichts, da das NAND auf die Auswertung von  $s_1$  warten muss, damit sicher ist, dass der richtige Wert am NAND anliegt



# Aufgabe 3 – MO - Addierer

52

- ▶ 4 Carry Ripple

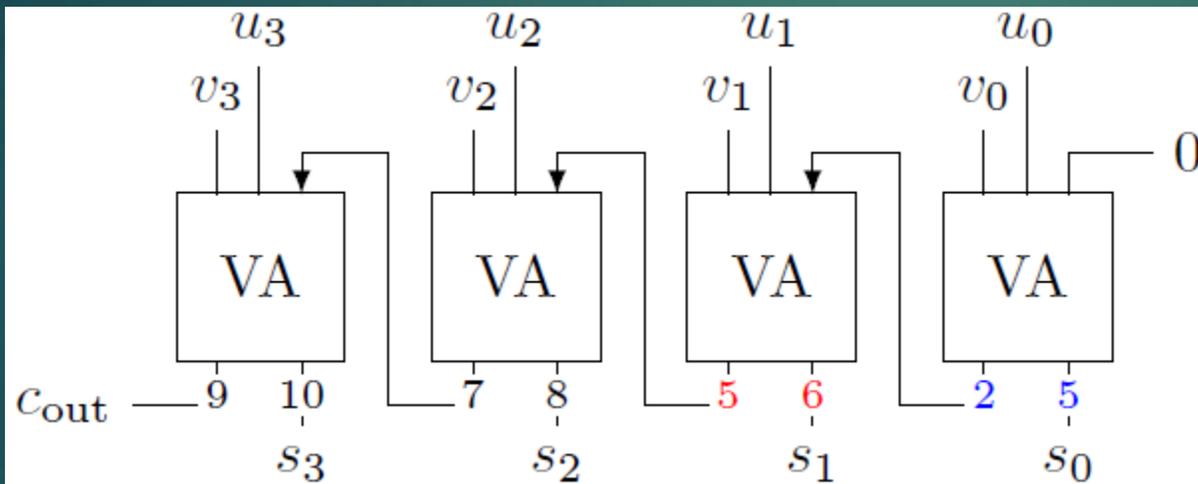


# Aufgabe 3 – MO - Addierer

53

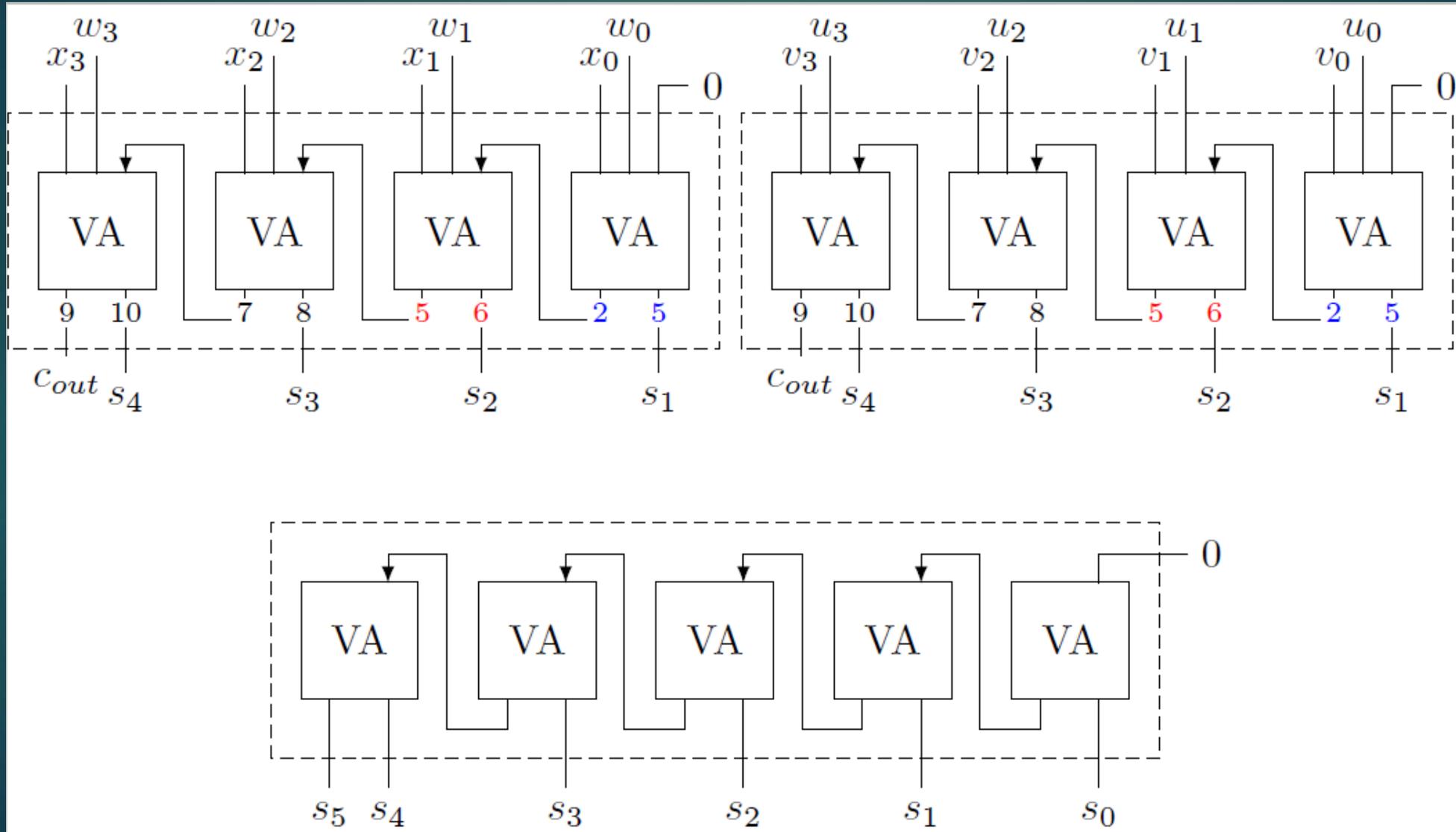
- ▶ 4 Carry Ripple

Im nächsten Schritt muss der Volladdierer 5 Takte auf  $c_{in}$  warten, bevor die Werteänderung korrekt ist. Wir brauchen ab jetzt +2/+3 Takte für c und s.



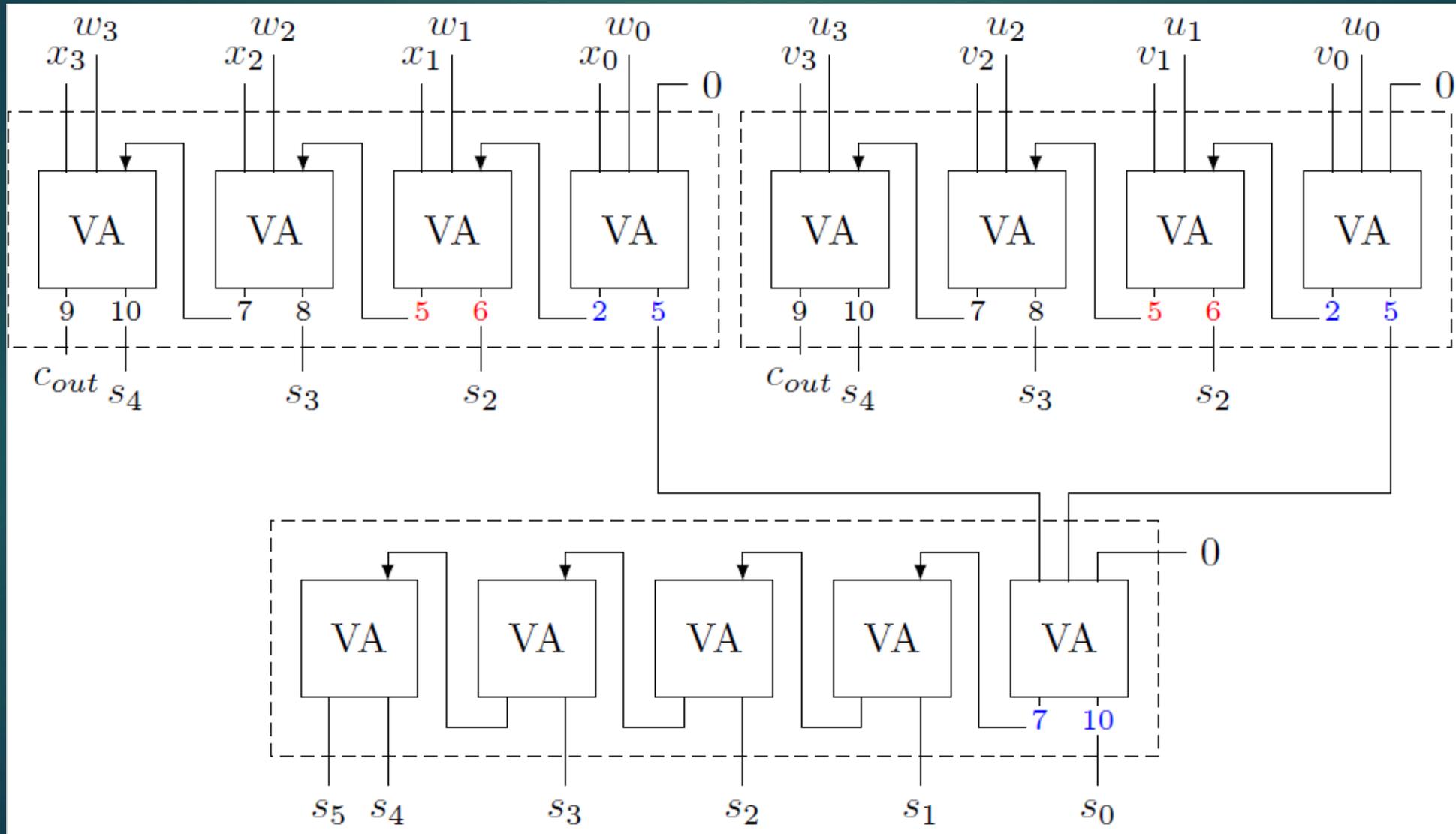
# Aufgabe 3 – MO - Addierer

54



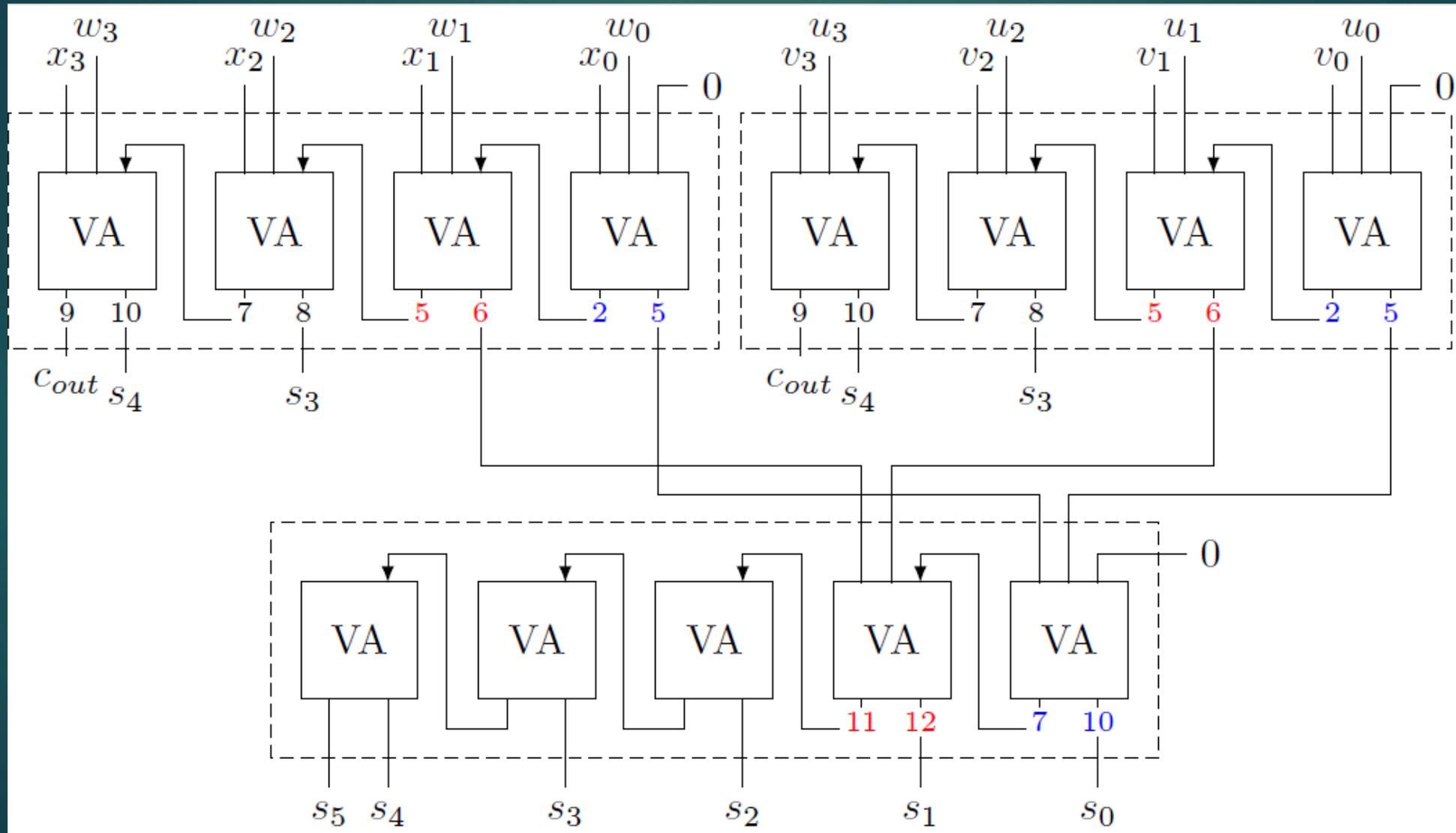
# Aufgabe 3 – MO - Addierer

55



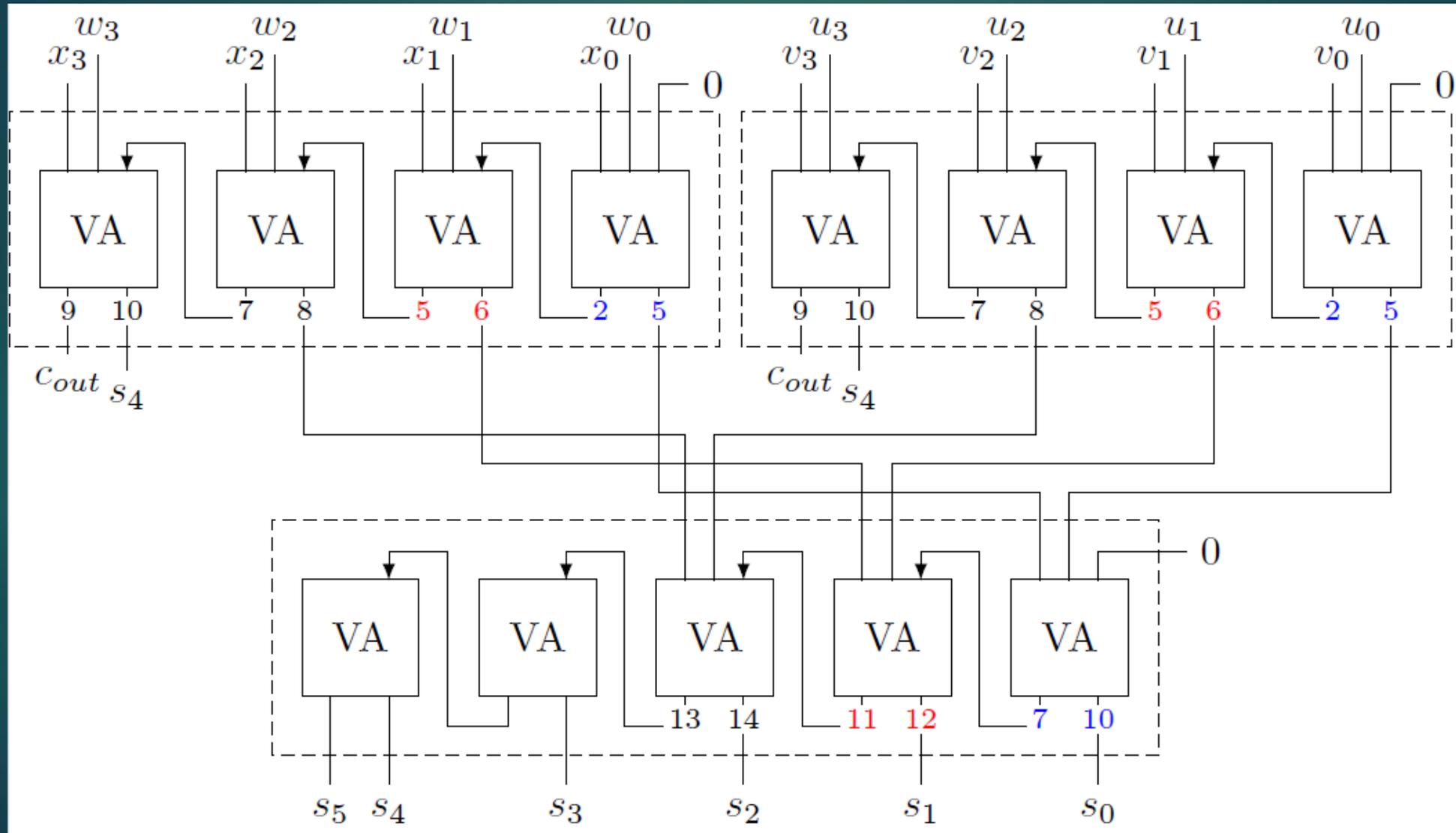
# Aufgabe 3 – MO - Addierer

56



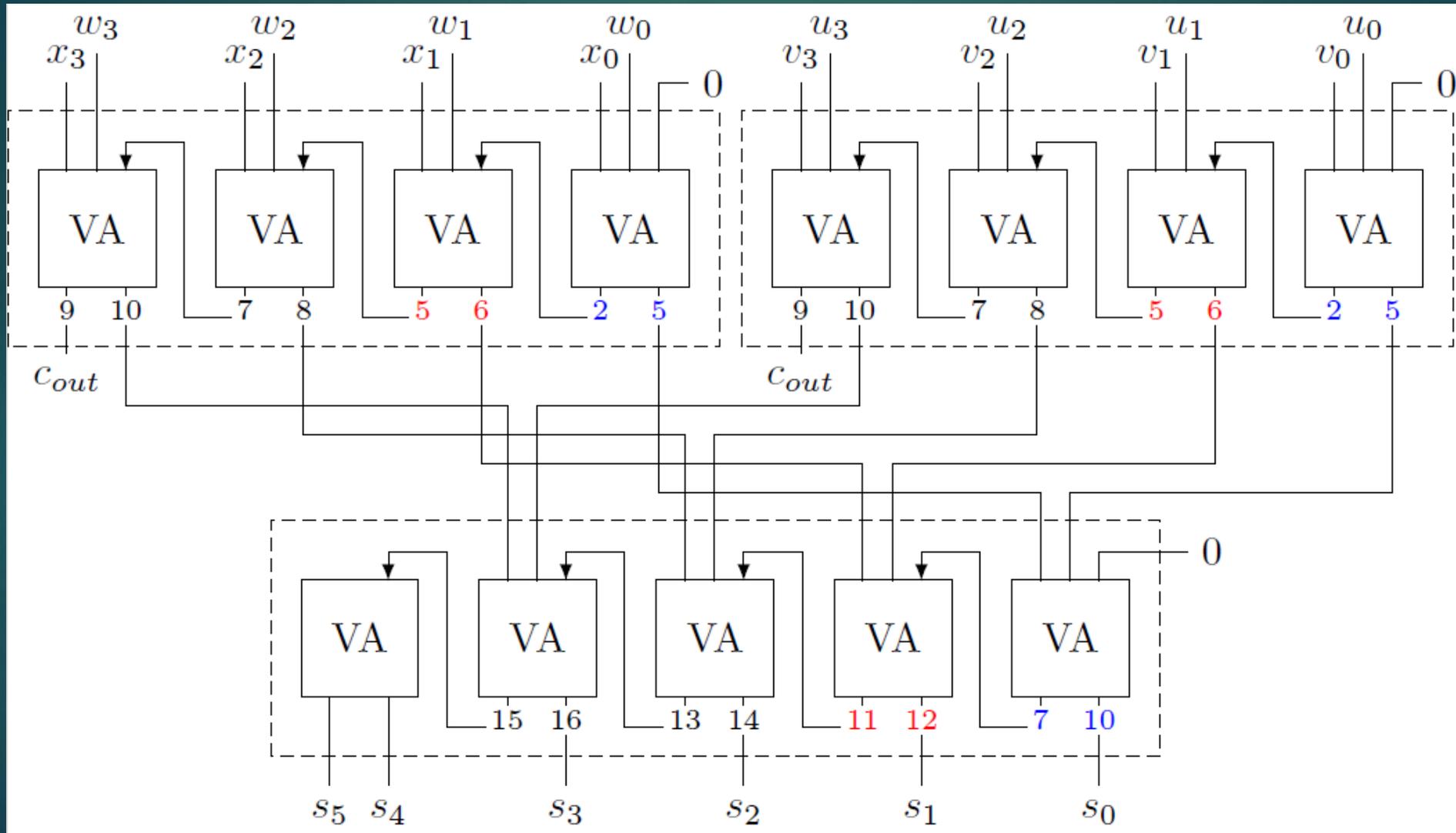
# Aufgabe 3 – MO - Addierer

57



# Aufgabe 3 – MO - Addierer

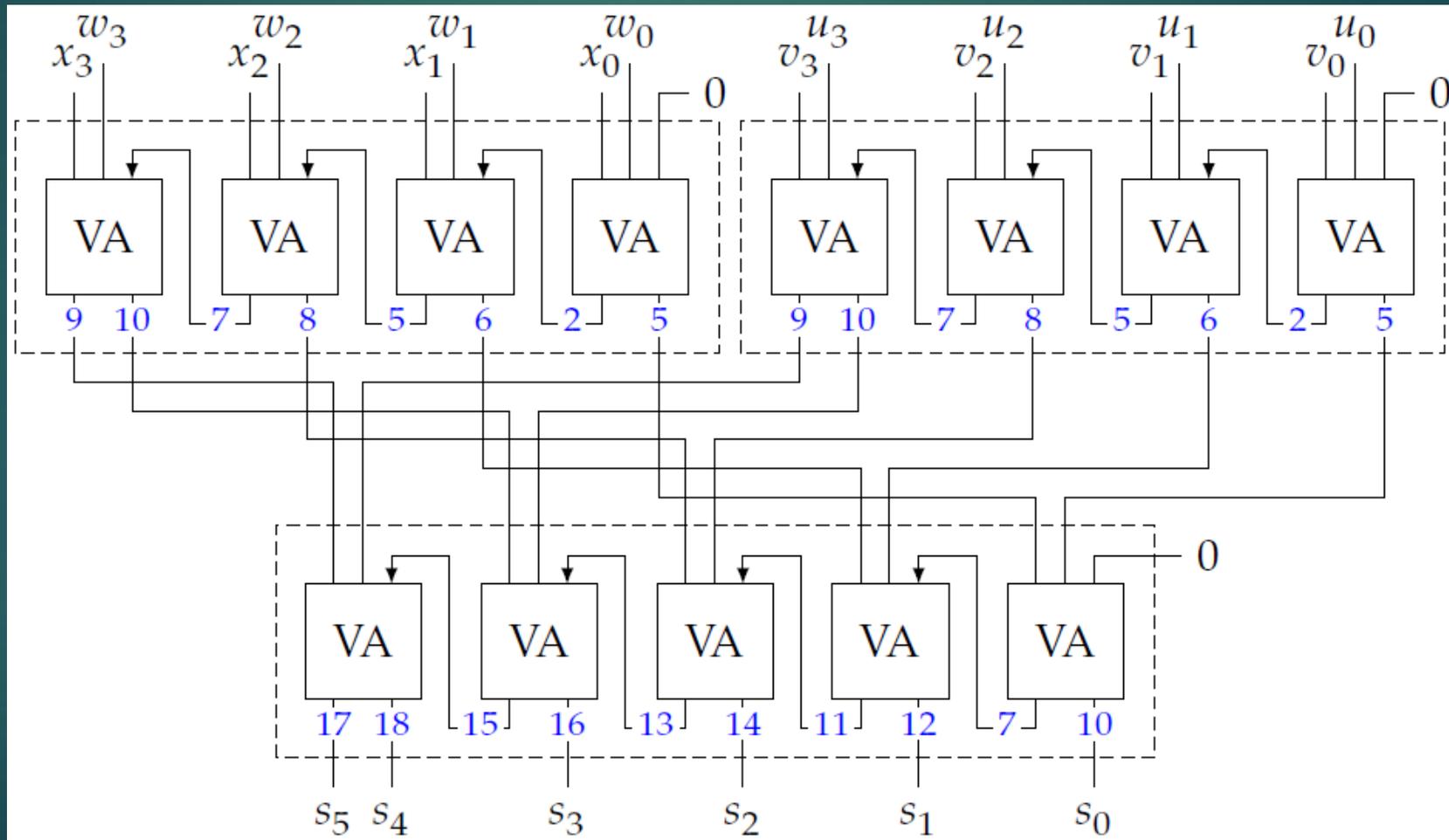
58



# Aufgabe 3 – MO - Addierer

59

- ▶  $U + v = a$     $x + w = b$     $a + b = s$



Vielen Dank für die schmeichelnde  
Aufmerksamkeit

‘Без труда ничего не даётся.’

oder auch

‘Любишь кататься, люби и саночки  
ВОЗИТЬ’

60