GTI – ÜBUNG 3

ZAHLENDARSTELLUNG, ZAHLENKONVERSION UND ARITHMETIK

Friedrich-Alexander Universität Erlangen-Nürnberg
Jan Spieck

Aufgabe 1 – Zahlendarstellungen

- Beschreiben Sie den allgemeinen Aufbau einer Zahl N in einem polyadischen Zahlensystem.

Hinweis: Sei 1001100_2 die Darstellung einer Zahl

wie wird eine Zahl dadurch repräsentiert?

Aufgabe 1 – Zahlendarstellungen

- Beschreiben Sie den allgemeinen Aufbau einer Zahl N in einem polyadischen Zahlensystem.

Lösung: Sei 1001100_2 die Darstellung einer Zahl:

$$N = 1 \cdot 2^6 + 0 \cdot 2^5 + 0 \cdot 2^4 + 1 \cdot 2^3 + 1 \cdot 2^2 + 0 \cdot 2^1 + 0 \cdot 2^0$$

Allgemein: $N = d_{n-1} \cdot R^{n-1} + \cdots + d_1 \cdot R^1 + d_0 \cdot R^0$

$= \sum_{i=0}^{n-1} d_i \cdot R^i$

R: Basis; R^i: Wertigkeit; d_i: Ziffer der Stelle i; Z = 0, …, R-1

Friedrich-Alexander Universität Erlangen-Nürnberg
Jan Spieck

Aufgabe 1 – Zahlendarstellungen

- Welche ist die größte mit n Bits darstellbar Zahl?

Hinweis: Bei welcher Zahl muss eine Binärstelle hinzugefügt werden

z.B. 11_2. Wie lautet die darauf folgende Zahl?

Friedrich-Alexander Universität Erlangen-Nürnberg
Jan Spieck

Aufgabe 1 – Zahlendarstellungen

Friedrich-Alexander Universität Erlangen-Nürnberg
Jan Spieck

- Welche ist die größte mit n Bits darstellbar Zahl?

Lösung: Bei welcher Zahl muss eine Binärstelle hinzugefügt werden?

Größte darstellbare Zahl ist 111…1, wobei die Anzahl der Einsen gleich n ist.

Die nächstgrößere Zahl wäre also 100…0, wobei auch hier die Anzahl der Nullen n ist. Dies entspricht 2^n.

Die größte mit n Bits darstellbare Zahl ist also $2^n - 1$.

– 1, da auch die 0 dargestellt werden soll!

Aufgabe 1 – Zahlendarstellungen

- Geben Sie den Wertebereich einer m Bit breiten Zahl

  $R = r_{m-1}r_{m-2}...r_1r_0$

  in (1): Vorzeichen/Betragsdarstellung

  in (2): 1er-Komplementdarstellung

  in (3): 2er-Komplementdarstellung

  an und nennen Sie die Formel für die Berechnung des Zahlenwertes.

Hinweis: Was unterscheidet die Darstellungsformen?

Friedrich-Alexander Universität Erlangen-Nürnberg
Jan Spieck

Aufgabe 1 – Zahlendarstellungen

- Vorzeichen/Betragsdarstellung

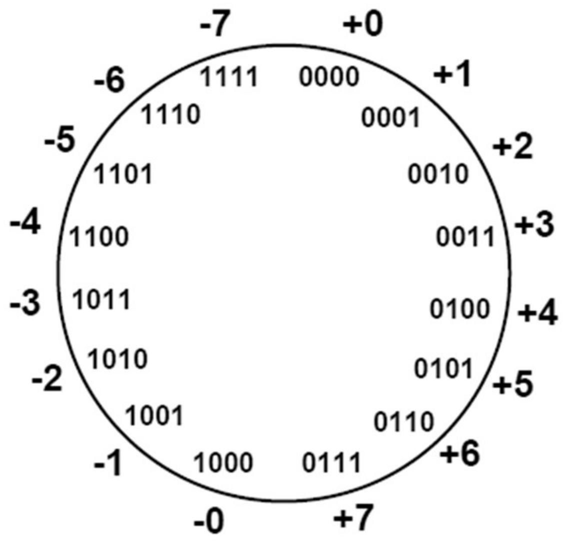
Erstes Bit bestimmt Vorzeichen: 0 = +, 1 = -

Der Rest bestimmt den Wert dieser Zahl.

Wertebereich: vgl. A1 b,

Formel: $R = (-1)^{r_{m-1}} \cdot \sum_{i=0}^{m-2} r_i \cdot 2^i$

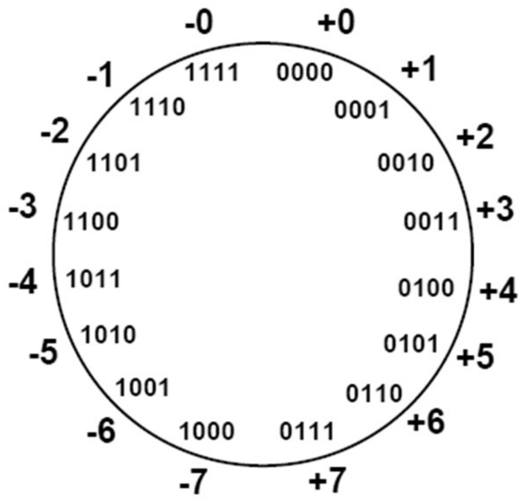
Wertebereich: $\pm\,(2^{m-1} - 1)$



Friedrich-Alexander Universität Erlangen-Nürnberg
Jan Spieck

Aufgabe 1 – Zahlendarstellungen

- 1er- Komplement



Ist das VB = 0:	Bekannte Darstellung
Ist das VB = 1:	Wert muss invertiert werden d.h. VB setzen und dann beim Rest 0 und 1 vertauschen

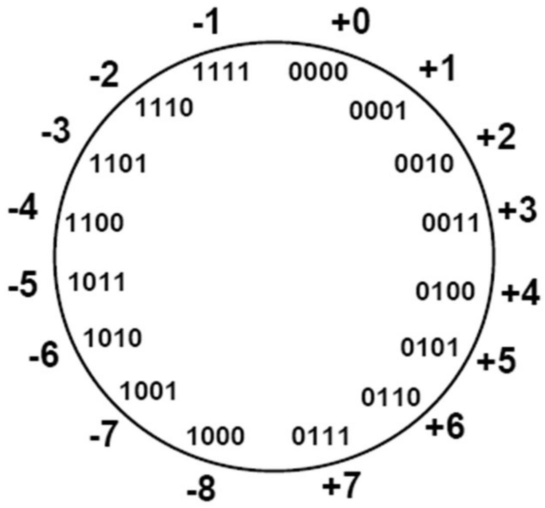
Formel: $R = r_{m-1} - (r_{m-1} \cdot 2^{m-1}) + \sum_{i=0}^{m-2} r_i \cdot 2^i$

Wertebereich: $\pm\,(2^{m-1} - 1)$

Friedrich-Alexander Universität Erlangen-Nürnberg
Jan Spieck

Aufgabe 1 – Zahlendarstellungen

- 2er- Komplement



Ist das VB = 0: Bekannte Darstellung

Ist das VB = 1: Bitweises Komplement + 1

Trick: von rechts aus bis zur ersten 1 schreiten, dann linken Rest invertieren

Formel: $R = -(r_{m-1} \cdot 2^{m-1}) + \sum_{i=0}^{m-2} r_i \cdot 2^i$

Wertebereich: $[-2^{m-1}, 2^{m-1} - 1]$

Friedrich-Alexander Universität Erlangen-Nürnberg
Jan Spieck

Aufgabe 2 - Zahlendarstellungen

Beschreibung

- Gegeben seien die Zahlen:

  2, 64, 255

  -254, -32

- Stellen Sie diese Zahlen in folgenden Systemen dar:

  (1) Vorzeichen/Betragsdarstellung

  (2) 1er-Komplementdarstellung

  (3) 2er-Komplementdarstellung

Friedrich-Alexander Universität Erlangen-Nürnberg
Jan Spieck

Aufgabe 2 - Zahlendarstellungen

- Gegeben seien die Zahlen:

  2, 64, 255

Die Zahlen sind positiv also gilt:

(1: Vorzeichen/Betrag) = (2: 1er-Komplement) = (3: 2er-Komplement)

2 und 64 sind 2er-Potenzen also muss nur die jeweilige Stelle gesetzt werden:

Zur Erinnerung: Stellenwertigkeit …|256|128|64|32|16|8|4|2|1

2_{10}: $0|10_2 \rightarrow 010_2$ 64_{10}: $0|1000000_2 \rightarrow 01000000_2$

255 = 256 - 1, also werden ab der 128-Stelle Einsen gesetzt:

$255_{10} = 0|11111111_2 \rightarrow 011111111_2$

Friedrich-Alexander Universität Erlangen-Nürnberg
Jan Spieck

Aufgabe 2 - Zahlendarstellungen

Friedrich-Alexander Universität Erlangen-Nürnberg
Jan Spieck

- Gegeben seien die Zahlen:

  -254, -32

(1) Vorzeichenbetragsdarstellung

Schritt 1: Darstellung des Wertes bestimmen

Zur Bestimmung des Binärwertes einer Zahl a_{10}:

Bei höchstmöglicher 2er-Potenz k, die in a „hineinpasst“, anfangen

Wiederhole bis die Zahl a == 0:

if(a >= 2^k) { a = a - 2^k; WRITE 1; k--;} else {WRITE 0; k--}

Schritt 2: Vorzeichenbit 1 setzen

Aufgabe 2 - Zahlendarstellungen

(1) Vorzeichenbetragsdarstellung

Schritt 1: Darstellung des Wertes bestimmen

254: größte 2er Potenz = 128

$254 - 128 = 126 \quad |1_2$

$126 - 64 = 62 \quad |1_2$

$62 - 32 = 30 \quad |1_2$

$30 - 16 = 14 \quad |1_2$

$14 - 8 = 6 \quad |1_2$

$6 - 4 = 2 \quad |1_2$

$2-2 = 0 \quad |1_2$

$0 < 1 \quad |0_2$

Ergebnis:
$254_{10} = 11111110_2$

Für Schlaue:
255 schon bestimmt
Eins abziehen

Schritt 2: VB setzen

$1|11111110_2$

Friedrich-Alexander Universität Erlangen-Nürnberg
Jan Spieck

Aufgabe 2 - Zahlendarstellungen

(2) 1er-Komplement

Schritt 1: Darstellung des Wertes nach Vorzeichen/Betrag bestimmen

-254_{10}: $1|11111110_2$

Schritt 2: Invertieren aller Bits (außer VB)

-254_{10}: $1|00000001_2$

(3) 2er-Komplement

Variante 1: 1er-Komplementdarstellung + 1

-254_{10}: $1|00000001_2$ (1er) + 1_2 = $1|00000010_2$ (2er)

Variante 2: positive VB-Darstellung (Erste 1 von links aus suchen und dann linke Seite invertieren, rechte Seite beibehalten)

-254_{10}: $0|11111110_2$ (VB) → $1|00000010_2$ (2er)

Friedrich-Alexander Universität Erlangen-Nürnberg
Jan Spieck

Aufgabe 2 - Zahlendarstellungen

(1) Vorzeichenbetragsdarstellung

Schritt 1: Darstellung des Wertes bestimmen

32_{10}: größte 2er Potenz = 32

32 – 32 = 0	$\|1_2$
0 < 16	$\|0_2$
0 < 8	$\|0_2$
0 < 4	$\|0_2$
0 < 2	$\|0_2$
0 < 1	$\|0_2$

Ergebnis:
$32_{10} = 100000_2$

Für Schlaue:
32 ist 2er-Potenz

Schritt 2: VB setzen

$1|100000_2$

Friedrich-Alexander Universität Erlangen-Nürnberg
Jan Spieck

Aufgabe 2 - Zahlendarstellungen

(2) 1er-Komplement

Schritt 1: Darstellung des Wertes nach Vorzeichen/Betrag bestimmen

-32_{10}: $1|100000_2$

Schritt 2: Invertieren aller Bits (außer VB)

-32_{10}: $1|011111_2$

(3) 2er-Komplement

Variante 1: 1er-Komplementdarstellung + 1

-32_{10}: $1|011111_2$ (1er) + 1_2 = $1|100000_2$ (2er)

Variante 2: positive VB-Darstellung (Erste 1 von links aus suchen und dann linke Seite invertieren, rechte Seite beibehalten)

-32_{10}: $0|100000_2$ (VB) $\rightarrow$ $1|100000_2$ (2er)

Friedrich-Alexander Universität Erlangen-Nürnberg
Jan Spieck

Aufgabe 2 - Zahlendarstellungen

Friedrich-Alexander Universität Erlangen-Nürnberg
Jan Spieck

- Zusammenfassung:

Dezimal	i) Betrag/Vorzeichen	ii) 1er-Komplement	iii) 2er-Komplement
2	(0) 10	010	010
64	(0) 100 0000	0100 0000	0100 0000
255	(0) 1111 1111	0 1111 1111	0 1111 1111
-254	(1) 1111 1110	1 0000 0001	1 0000 0010
-32	(1) 10 0000	101 1111	110 0000

Aufgabe 3 - Zahlenkonversion

- Gegeben seien die positiven Binärzahlen:

  10_2, 10100_2, 111111_2, 1000000_2, 11111111_2, 11111110_2

  Stellen Sie diese Zahlen folgendermaßen dar:

  (1) Hexadezimalzahl

  (2) Oktalzahl

  (3) BCD-Zahl

Aufgabe 3 - Zahlenkonversion

BCD – Zahl:

- Akronym für: Binary Coded Decimal
- Jede Dezimalstelle wird durch vier Binärstellen codiert ($2^3 < 10 < 2^4$)
- Sehr ineffiziente Speicherung, aber leicht rekonstruierbar

Oktalsystem:

- System zur Basis 8 (0-7)
- Eine Oktalstelle repräsentiert somit genau drei Binärstellen

Weitere Zahlensysteme (definiert nach 1 a,):

Aufsteigend: Unär (1), Binär (2), Ternär (3), Quaternär (4), Quinär (5), Hexal (6), …

Friedrich-Alexander Universität Erlangen-Nürnberg
Jan Spieck

Aufgabe 3 - Zahlenkonversion

Friedrich-Alexander Universität Erlangen-Nürnberg
Jan Spieck

Systemkonversion:

Es gibt zwei Arten von Konversionsmechanismen:

- Konversion verwandter System a $\rightarrow$ b
  - $a = b^n$ $(n \in N)$: Konstruktion durch n-äquidistante Zerteilung einer Stelle
  - $a^n = b$ $(n \in N)$: Leichte Konstruktion durch Verschmelzung mehrerer Stellen

Beispiele einer Verschmelzung (jeweils n Stellen als eine Zelle):

Quaternär $\rightarrow$ Hexadezimal: $321202_4 \rightarrow 32|12|02_4 \rightarrow E62_{16}$

Ternär $\rightarrow$ Nonär: $121202_3 \rightarrow 12|12|02_3 \rightarrow 552_9$

Beispiel einer Zerteilung (jeweils n Stellen als eine Zelle):

Oktal $\rightarrow$ Binär: $3457_8 \rightarrow 011|100|101|111_2 \rightarrow 011100101111_2$

Aufgabe 3 - Zahlenkonversion

Systemkonversion:

Es gibt zwei Arten von Konversionsmechanismen:

▶ Konversion fremder System a → b

Algorithmus zur Umwandlung zweier fremder Zahlensysteme:

1: Dividiere b im System a von Zahl s im System a (vgl. binären Algorithmus)

2: Merke dir das Ergebnis e = s / b und den Rest r = s % b

3: r repräsentiert eine Stelle des Ergebnisses im System b

4: Ist e > 0, so wird b zu e und gehe zu 1

5: Lese das Ergebnis rückwärts aus

Hinweis: Division im gleichen Zahlensystem sehr ungewohnt, deshalb wird häufig der Umweg über das Dezimalsystem präferiert (langsamer!)

Friedrich-Alexander Universität Erlangen-Nürnberg
Jan Spieck

Aufgabe 3 - Zahlenkonversion

- Gegeben seien die positiven Binärzahlen:

  10_2, 10100_2, 111111_2, 1000000_2, 11111111_2, 11111110_2

  Stellen Sie diese Zahlen folgendermaßen dar:

  (1) Hexadezimalzahl (Zweierpotenz: Weg 1)

  (2) Oktalzahl (Zweierpotenz: Weg 1)

  (3) BCD-Zahl (Konvertieren in das Dezimalsystem, dann Ziffern binär ausdrücken)

Friedrich-Alexander Universität Erlangen-Nürnberg
Jan Spieck

Aufgabe 3 - Zahlenkonversion

- Umwandlung in das Hexadezimalsystem

Binärzahl	Gliederung	Umwandlung jeder Stelle
10_2:	0010_2	2_{16}
10100_2:	$0001\|0100_2$	14_{16}
111111_2:	$0011\|1111_2$	$3F_{16}$
1000000_2:	$0100\|0000_2$	40_{16}
11111111_2:	$1111\|1111_2$	FF_{16}
11111110_2:	$1111\|1110_2$	FE_{16}

Aufgabe 3 - Zahlenkonversion

- Umwandlung in das Oktalsystem

Binärzahl	Gliederung	Umwandlung jeder Stelle
10_2:	010_2	2_8
10100_2:	$010\|100_2$	24_8
111111_2:	$111\|111_2$	77_8
1000000_2:	$1\|000\|000_2$	100_8
11111111_2:	$011\|111\|111_2$	377_8
11111110_2:	$011\|111\|110_2$	376_8

Friedrich-Alexander Universität Erlangen-Nürnberg
Jan Spieck

Aufgabe 3 - Zahlenkonversion

- Umwandlung in das BCD-System

Binärzahl	Dezimalzahl	BCD-System (jede Stelle hat vier Bit)
10_2:	2	0010
10100_2:	4+16 = 20	0010.0000
111111_2:	2^6 - 1 = 63	0110.0011
1000000_2:	2^6 = 64	0110.0100
11111111_2:	2^8 - 1 = 255	0010.0101.0101
11111110_2:	2^8 - 2 = 254	0010.0101.0100

Aufgabe 3 – Zahlenkonversion

Friedrich-Alexander Universität Erlangen-Nürnberg
Jan Spieck

- Zusammenfassung:

Binär	i) Hexadezimal	ii) Oktal	Dezimal	iii) BCD
10	2	2	2	0010
1 0100	14	24	20	0010 0000
11 1111	3F	77	63	0110 0011
100 0000	40	100	64	0110 0100
1111 1111	FF	377	255	0010 0101 0101
1111 1110	FE	376	254	0010 0101 0100

Aufgabe 3 - Zahlenkonversion

Umrechnung über den Umweg des Dezimalsystems:

```
string compute(int baseA, int baseB, string number){
    ll val = getDecimal(number, baseA);
    return decimalToOther(val, baseB);
}

ll getDecimal(string number, int sys){
    ll result = 0;
    for(unsigned int i = 0; i < number.length(); i++){
        result += charToValue(number.at(i)) * pow(sys,
                  number.length()-i-1);
    }
    return result;
}
```

Friedrich-Alexander Universität Erlangen-Nürnberg
Jan Spieck

Aufgabe 3 - Zahlenkonversion

Dezimalsystem zum anderen Zahlensystem:

```
string decimalToOther(ll num, int sys){
    if(num == 0)
        return "0";
    //get highest potence, that fits
    int x = 0;
    while(pow(sys, x) <= num){x++;}
    x--;
    string result = "";
    for(int h = x; h >= 0; h--){
        ll pot = pow(sys, h);
        int wieoft = floor(num/pot);
        num -= wieoft*pot;
        result += valueToChar(wieoft);
    }
    return result;
}
```

Friedrich-Alexander Universität Erlangen-Nürnberg
Jan Spieck

Aufgabe 3 - Zahlenkonversion

Hilfsmethoden:

```
ll charToValue(char s){
    if(s - '0' >= 0 && '9' - s >= 0)
        return s -'0';
    else
        return 10 + s - 'A';
}

char valueToChar(int s){
    if(s < 10)
        return '0' + s;
    else
        return 'A' + s - 10;
}
```

Friedrich-Alexander Universität Erlangen-Nürnberg
Jan Spieck

Denkpause

Aufgabe:

Du hast die Aufgabe eine Viertelstunde zu messen, bist aber abseits der Zivilisation und besitzt keine Uhr. Du hast aber zwei Zundschnüre, die jeweils genau 20 Minuten brennen, sowie ein Feuerzeug.

Hinweis:

Es gibt natürlich mehrere Lösungsmöglichkeiten

Friedrich-Alexander Universität Erlangen-Nürnberg
Jan Spieck

Denkpause

Lösung:

Möglichkeit 1: Zündschnur falten und abtrennen bzw. markieren

Möglichkeit 2: Erste Zündschnur von beiden Seiten anzünden und gleichzeitig die zweite Zündschnur von nur einer Seite.

Wenn die erste Zündschnur fertig gebrannt ist, die zweite auch von der zweiten Seite anzünden.

Ist diese fertig gebrannt, ist eine Viertelstunde um.

Friedrich-Alexander Universität Erlangen-Nürnberg
Jan Spieck

Aufgabe 4 - Zahlensysteme

- Konvertieren Sie die folgenden Hexadezimalzahl mit sukzessiver Division unter ausschließlicher Verwendung der angegebenen Zahlensysteme ins Binär bzw. Ternärsystem.

$(A03)_{16} = (?)_2$

$(A03)_{16} = (?)_3$

Hinweis: hier wird der Algorithmus zur Konversion fremder Zahlensystem gefordert

Friedrich-Alexander Universität Erlangen-Nürnberg
Jan Spieck

Aufgabe 4 - Zahlensysteme

Algorithmus zur Umwandlung zweier fremder Zahlensysteme (a → b):

1: Dividiere b im System a von Zahl s im System a

$s = (A03)_{16}$ a = 16 (Hex) b = 2 (Binär) → 2_{16}

2: Merke dir das Ergebnis e = s/b und den Rest r = s%b

$e = (A03)_{16} / 2_{16} = 501_{16}$ $R = 1_{16}$

-A
00
-00
003
-002
1

$e = (501)_{16} / 2_{16} = 280_{16}$ $R = 1_{16}$

-4
10
-10
01
-00
1

Achtung:
Zwischenwert
$10_{16} = 16_{10}$
$16_{10} / 2_{10} = 8$

Friedrich-Alexander Universität Erlangen-Nürnberg
Jan Spieck

Aufgabe 4 - Zahlensysteme

3: Wiederhole bis Ergebnis e = 0, lese dann das Ergebnis rückwärts aus

$A03_{16}$	$/2_{16}$	$= 501_{16}$	$R\ 1_{16}$
501_{16}	$/2_{16}$	$= 280_{16}$	$R\ 1_{16}$
280_{16}	$/2_{16}$	$= 140_{16}$	$R\ 0_{16}$
140_{16}	$/2_{16}$	$= A0_{16}$	$R\ 0_{16}$
$A0_{16}$	$/2_{16}$	$= 50_{16}$	$R\ 0_{16}$
50_{16}	$/2_{16}$	$= 28_{16}$	$R\ 0_{16}$
28_{16}	$/2_{16}$	$= 14_{16}$	$R\ 0_{16}$
14_{16}	$/2_{16}$	$= A_{16}$	$R\ 0_{16}$
A_{16}	$/2_{16}$	$= 5_{16}$	$R\ 0_{16}$
5_{16}	$/2_{16}$	$= 2_{16}$	$R\ 1_{16}$
2_{16}	$/2_{16}$	$= 1_{16}$	$R\ 0_{16}$
1_{16}	$/2_{16}$	$= 0_{16}$	$R\ 1_{16}$

Ergebnis:
$A03_{16} = 1010\ 0000\ 0011_2$

Friedrich-Alexander Universität Erlangen-Nürnberg
Jan Spieck

Aufgabe 4 - Zahlensysteme

Algorithmus zur Umwandlung zweier fremder Zahlensysteme (a → b):

1: Dividiere b im System a von Zahl s im System a

$s = (A03)_{16}$ a = 16 (Hex) b = 3 (Ternär) → 3_{16}

2: Merke dir das Ergebnis e = s/b und den Rest r = s%b

$e = (A03)_{16} / 3_{16} = 356_{16}$ $R = 1_{16}$

-9

10

-0F

013

-012

1

Achtung:
Zwischenwert
$10_{16} = 16_{10}$
$13_{16} = 19_{10}$

$e = (356)_{16} / 3_{16} = 11C_{16}$ $R = 2_{16}$

-3

05

-03

26

-24

2

Achtung:
Zwischenwert
$26_{16} = 38_{10}$

Friedrich-Alexander Universität Erlangen-Nürnberg
Jan Spieck

Aufgabe 4 - Zahlensysteme

3: Wiederhole bis Ergebnis e = 0, lese dann das Ergebnis rückwärts aus

$A03_{16}$	$/3_{16}$	$= 356_{16}$	$R\ 1_{16}$
356_{16}	$/3_{16}$	$= 11C_{16}$	$R\ 2_{16}$
$11C_{16}$	$/3_{16}$	$= 5E_{16}$	$R\ 2_{16}$
$5E_{16}$	$/3_{16}$	$= 1F_{16}$	$R\ 1_{16}$
$1F_{16}$	$/3_{16}$	$= A_{16}$	$R\ 1_{16}$
A_{16}	$/3_{16}$	$= 3_{16}$	$R\ 1_{16}$
3_{16}	$/3_{16}$	$= 1_{16}$	$R\ 0_{16}$
1_{16}	$/3_{16}$	$= 0_{16}$	$R\ 1_{16}$

Ergebnis:
$A03_{16} = 10111221_3$

Friedrich-Alexander Universität Erlangen-Nürnberg
Jan Spieck

Aufgabe 4 - Zahlensysteme

- Konvertieren Sie die folgende Binärzahl unter ausschließlicher Verwendung der angegebenen Zahlensysteme ins Oktal- bzw. Ternärsystem.

  $(11100111)_2 = (?)_8$

  $(11100111)_2 = (?)_3$

  Hinweis: hier wird der Algorithmus zur Konversion fremder Zahlensystem gefordert

  bei der Umrechnung in das Oktalsystem gibt es einen Trick

Friedrich-Alexander Universität Erlangen-Nürnberg
Jan Spieck

Aufgabe 4 - Zahlensysteme

Algorithmus zur Umwandlung zweier fremder Zahlensysteme (a → b):

1: Dividiere b im System a von Zahl s im System a

$s = (11100111)_2$ $\quad$ a = 2 (Binär) $\quad$ b = 8 (Oktal) → 1000_2

2: Merke dir das Ergebnis e = s/b und den Rest r = s%b

$(11100111)_2$	$/ (1000)_2 = 11100_2$	R 111_2
$(11100)_2$	$/ (1000)_2 = 11_2$	R 100_2
$(11)_2$	$/ (1000)_2 = 0_2$	R 011_2

3: Wandeln des Restes in Zielsystem

$111_2 = 7_8$ $\quad$ $100_2 = 4_8$ $\quad$ $011_2 = 3_8$

4: Auslesen des Ergebnis von hinten nach vorne

$(11100111)_2 = 347_8$

Trick bei Division durch 2er-Potenz:

C = A / B $\quad$ [wobei $B = 2^n$]
C ist dann A um n Binärstellen nach rechts verschoben
D = A % B $\quad$ [wobei $B = 2^n$]
D sind dann die letzten n Stellen von A

Friedrich-Alexander Universität Erlangen-Nürnberg
Jan Spieck

Aufgabe 4 - Zahlensysteme

Algorithmus zur Umwandlung zweier fremder Zahlensysteme ($a \rightarrow b$):

1: Dividiere b im System a von Zahl s im System a

$s = (11100111)_2$ $a = 2$ (Binär) $b = 3$ (Ternär) $\rightarrow 11_2$

2: Merke dir das Ergebnis $e = s/b$ und den Rest $r = s\%b$

$(11100111)_2$	$/ (11)_2$	$= 1001101_2$	$R\ 00_2 = 0_3$
$(1001101)_2$	$/ (11)_2$	$= 11001_2$	$R\ 10_2 = 2_3$
$(11001)_2$	$/ (11)_2$	$= 1000_2$	$R\ 01_2 = 1_3$
$(1000)_2$	$/ (11)_2$	$= 10_2$	$R\ 10_2 = 2_3$
$(10)_2$	$/ (11)_2$	$= 0_2$	$R\ 10_2 = 2_3$

3: Auslesen des Ergebnis von hinten nach vorne

$(11100111)_2 = 22120_8$

Friedrich-Alexander Universität Erlangen-Nürnberg
Jan Spieck

Aufgabe 4 - Zahlensysteme

Ausschnitt der Division noch einmal ausführlicher

Erster Schritt der Division

$(11100111)_2 \quad / \; (11)_2 \quad = 1001101_2 \quad R\ 00_2 = 0_3$

$-\underline{11}\;_1$	11
01	$-\underline{11}\;_1$
$-\underline{00}\;_0$	01
10	$-\underline{00}\;_0$
$-\underline{00}\;_0$	11
100	$-\underline{11}_1$
$-\underline{011}\;_1$	0
11	

Technik:

Das Schuldividieren.

- Hinzunehmen einer weiteren Stelle bei jedem Schritt
- Ist der Dividend < Divisor, keine Division.
- Übernimm das Zwischenergebnis in der nächsten Zeile

Friedrich-Alexander Universität Erlangen-Nürnberg
Jan Spieck

Aufgabe 4 - Zahlensysteme

- Konvertieren Sie die Dezimalzahl 234,28175 ins Binärformat. Verwenden Sie für die Nachkommadarstellung maximal 4 Bit.

Hinweis:
1: Vorkommastellen nach bekannten Schema umrechnen
2: Nachkommastellen getrennt nach Verdopplungsverfahren bestimmen

Friedrich-Alexander Universität Erlangen-Nürnberg
Jan Spieck

Aufgabe 4 - Zahlensysteme

Darstellung von Nachkommastellen im Binärformat

- Konsequente Weiterführung des polyadischen Prinzips
- Wertigkeit einer Zahl z.B. 1101,1001: $2^n, \ldots, 2^1, 2^0, 2^{-1}, 2^{-2}, \ldots 2^{-n}$

Beispiel: 1,111 = 1 + 0,5 + 0,25 + 0,125 = 1,875

Umrechnungsalgorithmus dezimaler zu binärer Nachkommastellen

- Betrachte nur die dezimalen Nachkommastellen z.B. 4,234 → 0,234
- Multipliziere die Nachkommastellen mit 2:
  - Ist der Wert < 1: Notiere binär eine 0, wiederhole diesen Schritt
  - Ist der Wert > 1: Ziehe 1 ab und notiere binär eine 1, wiederhole diesen Schritt
  - Ist der Wert = 1: Die Nachkommastellen sind 1:1 umgesetzt, notiere eine 1. ENDE

Friedrich-Alexander Universität Erlangen-Nürnberg
Jan Spieck

Aufgabe 4 - Zahlensysteme

- Konvertieren Sie die Dezimalzahl 234,28125 ins Binärformat. Verwenden Sie für die Nachkommadarstellung maximal 4 Bit.

Vorkommastellen nach bekannten Schema umrechnen:

$234_{10} = 128 + 64 + 32 + 8 + 2 = 11101010_2$

Nachkommastellen getrennt nach Verdopplungsverfahren bestimmen

0,28125 · 2 =	0.5625	<1:	0	
0.56250 · 2 =	1.1250	>1:	1	
0.12500 · 2 =	0.2500	<1:	0	
0.25000 · 2 =	0.5000	<1:	0	ABBRUCH, wenn nur 4 Stellen
0.50000 · 2 =	1	=1:	1	ENDE

Friedrich-Alexander Universität Erlangen-Nürnberg
Jan Spieck

Aufgabe 4 - Zahlensysteme

- Konvertieren Sie die Dezimalzahl 234,28125 ins Binärformat. Verwenden Sie für die Nachkommadarstellung maximal 4 Bit.

Wir sehen also, dass unsere Zahl mit fünf Nachkommastellen exakt dargestellt werden könnte. Wir verwenden aber nur 4.

Fehler: $0.01001_2 - 0.0100_2 = 0.28175_{10} - 0.25_{10} = 0.03125_{10}$

Konkatenierung der Vor-/ und Nachkommastellen

$11101010{,}0100_2 = 11101010{,}01_2$

Nullen können bei Binärzahlen am Ende auch ausgelassen werden.

Friedrich-Alexander Universität Erlangen-Nürnberg
Jan Spieck

Aufgabe 5 – Zahlenumwandlung

Friedrich-Alexander Universität Erlangen-Nürnberg
Jan Spieck

Beschreibung

- Die Zahlendarstellung im IEEEE Standard 754 (einfache Genauigkeit)

Art	V	E (Charakteristik)		M (Mantisse)	
Bits	31	30	23	22	0

Aufgabe 5 - Zahlenumwandlung

Begriffsklärung:

IEEE:

- Akronym für Institute of Electrical and Electronics Engineers
- Gründungsdatum: 1. Januar. 1963
- Globaler Verband von Ingenieuren (v.a. Elektrotechnik, Informatik)
- Gremien zur Standardisierung von Techniken, Hardware und Software
- Beispiele: LAN, W-LAN, Bluetooth (IEEE 802), POSIX (IEEE 1003)

Friedrich-Alexander Universität Erlangen-Nürnberg
Jan Spieck

Aufgabe 5 - Zahlenumwandlung

- Welche Zahlen werden durch die beiden Werte nach obigen Muster dargestellt:

- $0\,1001\,1001\;\;1001\,1001\,1001\,0000\,0000\,000_2$
- $1\,0001\,1001\;\;1001\,1001\,0000\,0000\,0000\,000_2$

Hinweis: Gliedere nach vorgegebenen Schema

Friedrich-Alexander Universität Erlangen-Nürnberg
Jan Spieck

Aufgabe 5 - Zahlenumwandlung

- 0 1001 1001 1001 1001 1001 0000 0000 000_2

Art	V	E (Charakteristik)		M (Mantisse)	
Bits	31	30	23	22	0

Gliederung:

Vorzeichenbit: 0

Charakteristik: 1001 1001

Mantisse: 1001 1001 1001 1001 0000 0000 000

Friedrich-Alexander Universität Erlangen-Nürnberg
Jan Spieck

Aufgabe 5 - Zahlenumwandlung

Friedrich-Alexander Universität Erlangen-Nürnberg
Jan Spieck

Berechnung einer Gleitkommazahl:

$Z = (-1)^{VB} \cdot (1 + M) \cdot 2^{(E - BIAS)}$

Erklärung:

VB: 0 → positiv ($(-1)^0 = 1$) 1 → negativ ($(-1)^1 = -1$)

M: man erreicht somit 1,Mantisse

E: steht für *biased exponent* (Charakteristik). Diese berechnet zusammen mit dem *BIAS* den realen Exponenten (E - BIAS), wobei E (0 bis $2^n - 1$)

BIAS: $B = 2^{n-1} - 1$ (n: Breite der Charakteristik E), ca. Hälfte von E_{max}

Es sollen auch negative Exponenten darstellbar sein (z.B. 2^{-20}). Deshalb gleichmäßige Aufteilung auf positive und negative Exponenten durch Subtraktion des BIAS.

Aufgabe 5 - Zahlenumwandlung

Friedrich-Alexander Universität Erlangen-Nürnberg
Jan Spieck

Sonderwerte:

$Z = (-1)^{VB} \cdot (1 + M) \cdot 2^{(E - BIAS)}$

- **Spezialwerte** werden durch besondere Bitmuster codiert:

Biased Exponent E	Mantisse M	Wert	
0 < E < 255	**M**	$\mathbf{(-1)^V \cdot 2^{E-127} \cdot (1,M)}$	
255	$\neq 0$	ungültiger Wert (NAN)	z.B. Division durch 0
255	0	$(-1)^V \cdot \infty$ ($\pm$unendlich)	Wert außerhalb des Zahlenbereichs
0	$\neq 0$	$(-1)^V \cdot 2^{-126} \cdot (0,M)$	
0	0	$(-1)^V \cdot 0$	es gibt +0 und -0

Aufgabe 5 - Zahlenumwandlung

- $0\ 1001\ 1001\ \ 1001\ 1001\ 1001\ 0000\ 0000\ 000_2$

Berechnung einer Gleitkommazahl:

$Z = (-1)^{VB} \cdot (1 + M) \cdot 2^{(E\ -\ BIAS)}$

Trick hier:
Letzte 1 suchen:
1001 1001 1001
= 2457
Durch $2^{STELLEN}$ teilen:
$= 2^{12} = 4096$

Vorzeichenbit:	0_2
Charakteristik:	$1001\ 1001_2 = 153_{10}$
Mantisse:	$1001\ 1001\ 1001\ 0000\ 0000\ 000_2 = 2457/4096_{10}$
BIAS:	$B = 2^{n-1} - 1 = 2^{8-1} - 1 = 127_{10}$

$Z = \ (-1)^0 \cdot (1 + \frac{2457}{4096}) \cdot 2^{(153\ -\ 127)} = 107364352_{10}$

Friedrich-Alexander Universität Erlangen-Nürnberg
Jan Spieck

Aufgabe 5 - Zahlenumwandlung

- 1 0001 1001 1001 1001 0000 0000 0000 000_2

Berechnung einer Gleitkommazahl:

$Z = (-1)^{VB} \cdot (1 + M) \cdot 2^{(E\ -\ BIAS)}$

Trick hier:
Letzte 1 suchen:
1001 1001
= 153
Durch $2^{STELLEN}$ teilen:
= 2^8 = 256

Vorzeichenbit:	1_2
Charakteristik:	0001 $1001_2 = 25_{10}$
Mantisse:	1001 1001 0000 0000 0000 $000_2 = 153/256_{10}$
BIAS:	$B = 2^{n-1} - 1 = 2^{8-1} - 1 = 127_{10}$

$$Z = (-1)^1 \cdot \left(1 + \frac{153}{256}\right) \cdot 2^{(25\ -\ 127)} = -0.3151 \cdot 10^{-30}{}_{10}$$

Friedrich-Alexander Universität Erlangen-Nürnberg
Jan Spieck

Aufgabe 5 - Zahlenumwandlung

- Wandeln Sie folgende Zahlen in die 32 Bit IEEE Gleitkommadarstellung um:

- $-6{,}25 \cdot 10^{-3}{}_{10} = -0{,}000000\overline{0011}_2$
- $3{,}14159_{10} = 11{,}0010\ 0100\ 0011\ 1111\ 0011\ 11_2$

Hinweis: Zergliedere die bekannte Formel und berechne die Glieder

Friedrich-Alexander Universität Erlangen-Nürnberg
Jan Spieck

Aufgabe 5 - Zahlenumwandlung

- $-6{,}25 \cdot 10^{-3}{}_{10} = -0{,}00000\overline{0011}_2$

Berechnung einer Gleitkommazahl:

$Z = (-1)^{VB} \cdot (1 + M) \cdot 2^{(E\ -\ BIAS)}$

Vorzeichenbit: negativ, also 1_2

Mantisse: Angegeben ist keine Darstellung 1,M deshalb muss normalisiert werden (Shift nach links bzw. rechts)

$0{,}00000\overline{0011}_2 = 1.1\overline{0011} \cdot 2^{-8}$ (hier also Links-Shift: negativer Exponent)

Daraus lassen sich jetzt die Mantisse und der reale Exponent herleiten.

Friedrich-Alexander Universität Erlangen-Nürnberg
Jan Spieck

Aufgabe 5 - Zahlenumwandlung

- $-6{,}25 \cdot 10^{-3}{}_{10} = -0{,}00000\overline{0011}_2$

Berechnung einer Gleitkommazahl:

$Z = (-1)^{VB} \cdot (1 + M) \cdot 2^{(E\,-\,BIAS)}$

$0{,}00000\overline{0011}_2 = \underbrace{1.1\overline{0011}}_{\text{Mantisse}} \cdot \underbrace{2^{-8}}_{\text{realer Exponent}}$ (hier also Links-Shift: negativer Exponent)

Mantisse: 10011001100110011001101 (genau 23 Bit wählen)

$e_{real} = E - BIAS$ $E = e_{real} + BIAS = -8 + 127 = 119_{10}$

Charakteristik: $119_{10} = 01110111_2$

Zusammengesetzt: $1\ 0111\ 0111\ \ 1001\ 1001\ 1001\ 1001\ 1001\ 10\underline{1}_2$ (Bit gerundet)

Friedrich-Alexander Universität Erlangen-Nürnberg
Jan Spieck

Aufgabe 5 - Zahlenumwandlung

- $3{,}14159_{10} = 11{,}0010\ 0100\ 0011\ 1111\ 0011\ 11_2$

Berechnung einer Gleitkommazahl:

$Z = (-1)^{VB} \cdot (1 + M) \cdot 2^{(E\ -\ BIAS)}$

VB: 0, da positiv

Normalisierung: (Shift nach Rechts: $1{,}10010\ 0100\ \ldots \cdot 2^1$)

Mantisse: $1001\ 0010\ 0001\ 1111\ 1010\ 000_2$ (genau 23 bit)

Exponent: $E = e_{real} + BIAS = 1 + 127 = 128_{10} = 2^7 = 1000\ 0000$

Zusammengesetzt: $0\ 1000\ 0000\ \ 1001\ 0010\ 0001\ 1111\ 1010\ 000_2$

Friedrich-Alexander Universität Erlangen-Nürnberg
Jan Spieck

Aufgabe 5 - Zahlenumwandlung

Friedrich-Alexander Universität Erlangen-Nürnberg
Jan Spieck

- Auf wie viele dezimale Nachkommastellen genau kann die Zahl Pi angegeben werden?

Mantisse in der IEEE-Darstellung mit 23 Bits dargestellt.

$M = m^{-1}m^{-2} \ldots . m^{-23}$

Der Fehler, welcher durch das Fehlen der Stellen m^{-24} bis $m^{-\infty}$ entsteht, kann durch den Wert des kleinstmöglichen Bits beschrieben werden, , da gilt:

$$\sum_{24}^{\infty} 2^{-i} < 2^{-23}$$

Dezimal ausgedrückt: $2^{-23} = 0{,}12 \cdot 10^{-6}$

Wir haben also eine Ungenauigkeit von $0{,}12 \cdot 10^{-6} < 10^{-6}$ (d.h. 6 genaue Stellen)

Folglich: PI lässt sich auf 6 Nachkommastellen genau angeben

Zur Fehlerabschätzung reicht also die Bestimmung des Wertes des kleinsten Bits.

Aufgabe 5 - Zahlenumwandlung

- Warum kann einer float-Variablen der Wert $1 \cdot 10^{-42}$, nicht aber der Wert $1 \cdot 10^{42}$ zugewiesen werden?

Hinweis: es gibt eine besondere alternative Darstellungsform

Friedrich-Alexander Universität Erlangen-Nürnberg
Jan Spieck

Aufgabe 5 - Zahlenumwandlung

Friedrich-Alexander Universität Erlangen-Nürnberg
Jan Spieck

- Warum kann einer float-Variablen der Wert $1 \cdot 10^{-42}$, nicht aber der Wert $1 \cdot 10^{42}$ zugewiesen werden?

Lösung: Die denormalisierte Darstellung erweitert die normalisierte Darstellung.

Normalisierte Darstellung:

Durch den Exponent e kann das Komma um 127 Stellen nach links (E = 0) oder um 128 Stellen nach rechts geschoben werden (E = 255).

10^{-42} entspricht ungefähr 2^{-140}, aber nur 2^{-128} darstellbar

Denormalisierte Darstellung:

Format der Mantisse wird nicht mehr als 1,… impliziert, sondern als 0,…

Dies wird angenommen, wenn der Exponent -127 lautet!

→ Darstellung kleinerer Zahlen durch Schieben (und Auffüllen von Nullen) der Mantisse nach rechts möglich.

Aufgabe 5 - Zahlenumwandlung

- Warum kann einer float-Variablen der Wert $1 \cdot 10^{-42}$, nicht aber der Wert $1 \cdot 10^{42}$ zugewiesen werden?

Denormalisierte Darstellung:

Format der Mantisse wird nicht mehr als 1,… impliziert, sondern als 0,…

Sonderfall: -127

Statt dem Exponenten -127 wird die denormalisierte Darstellung mit e = -126 genutzt.

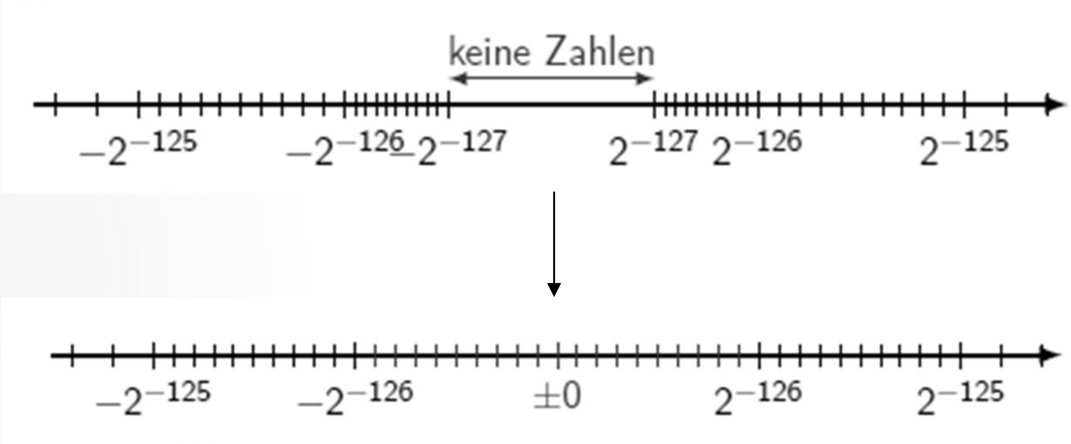
Die dargestellte Zahl lautet: 0,000…000M mit 126 Nullen nach dem Komma

Friedrich-Alexander Universität Erlangen-Nürnberg
Jan Spieck

Aufgabe 5 - Zahlenumwandlung

- Warum kann einer float-Variablen der Wert $1 \cdot 10^{-42}$, nicht aber der Wert $1 \cdot 10^{42}$ zugewiesen werden?

Im Intervall $(-2^{-126}, 2^{126})$ können insgesamt $2^{2|M|} - 1$ Zahlen gleichverteilt dargestellt werden, einschließlich der Null (doppelt).



Solche Zahlen nennt man auch denormalisierte Zahlen.

Friedrich-Alexander Universität Erlangen-Nürnberg
Jan Spieck

Aufgabe 5 - Zahlenumwandlung

- Warum kann einer float-Variablen der Wert $1 \cdot 10^{-42}$, nicht aber der Wert $1 \cdot 10^{42}$ zugewiesen werden?

Nachteile der denormalisierten Darstellung:

- Verringerung der Genauigkeit (geringere Anzahl an verbleibenden Stellen).
- Möglichkeit der Expansion des Exponenten in positiver Richtung nicht möglich, so dass eine Variable den Wert 10^{-42}, nicht aber der Wert 10^{42} besitzen kann.

  Denn: durch 0, … wird die dargestellte Zahl kleiner, nicht größer

Hinweis:

10^{42} kann lediglich durch positiv unendlich „approximiert" werden. Diese Darstellung ist nach IEEE der Fall, wenn E = max.

Friedrich-Alexander Universität Erlangen-Nürnberg
Jan Spieck

Vielen Dank für eure geschätzte Aufmerksamkeit!

"Der größte Sinnengenuss, der gar keine Einmischung von Ekel bei sich führt, ist im gesunden Zustande Ruhe nach der Arbeit."

Anthropologie in pragmatischer Hinsicht, drittes Buch, § 87. In: Akademieaugabe Band VII

Friedrich-Alexander Universität Erlangen-Nürnberg
Jan Spieck